Kein Zwillingsparadoxon

Ziel dieses kurzen Textes ist keine erneute Diskussion und angebliche Lösung des Zwillingsparadoxons, sondern eine Darstellung, die eine Konstruktion bzw. das Entstehen des *vermeintlichen* Paradoxons von vornherein vermeidet. Im Zentrum stehen beobachtbare Größen sowie die Gültigkeit der Darstellung auch und insbesondere für die Allgemeine Relativitätstheorie.

Zunächst wird kurz dargestellt, welchen wesentlichen konzeptionellen Fallen man bei einigen Darstellungen des Sachverhaltes begegnet, und wie diese im Folgenden vermieden werden. Anschließend wird das zentrale Konzept von beobachterspezifischen Eigenzeiten im Sinne von invarianten Observablen diskutiert. Die Eigenzeit entlang von Weltlinien wird als rein geometrisches Konzept eingeführt, so dass das vermeintliche Zwillingsparadox trivialerweise vermieden wird. Anschließend werden verschiedene mathematische Darstellungen der Eigenzeit diskutiert, um den Anschluss an diverse Spezialfälle herzustellen; diese Darstellungen sind jedoch allesamt sekundär gegenüber der zuvor diskutierten, fundamentalen geometrischen Defintion. Die Rolle der Lorentztransformation auch für gekrümmte Raumzeiten sowie die Unterscheidung zwischen Eigen- und Koordinatenzeit wird mathematisch präzisiert. Das Konzept der Eigenzeiten als beobachterspezifischen Invarianten wird kurz mathematisch erörtert, die Definition von Geodäten als Weltlinien maximaler Eigenzeit gestreift; Ziel ist das Verständnis der Irrelevanz der Beschleunigung für die Zeitdilatation. Der Zusammenhang zwischen den theoretischen Überlegungen einserseits sowie experimentellen Untersuchungen andererseits folgt aus der Einsteinschen Uhrenhypothese, die die Irrelevanz der Beschleunigung nochmals aufgreift [1]. Anschließend folgen einige explizite Beispiele wie die Zeitdilatation für Kreisbahnen, kompakte Raumzeiten sowie beschleunigte Beobachter. Zuletzt wird eine kontinuierliche, wechselweise Beobachtung der Eigenzeiten entlang zweier Weltlinien diskutiert.

Zur Motivation

Das Zwillingsparadoxon wird häufig mittels der Zeitdilatation von Koordinatenzeiten zwischen (stückweise) geradlinig gleichförmig bewegten d.h. inertialen Beobachtern diskutiert.

Dies hat konzeptionelle Nachteile:

- Der Fokus liegt auf inertialen Beobachtern; dabei bleibt unklar, wie man – ausgehend von diesen – überhaupt zu nicht-inertialen Beobachtern verallgemeinern kann.
- Es wird nicht sorgfältig zwischen Eigen- und Koordinatenzeit unterschieden; die Zeitdilatation für Eigenzeiten wird mit der Lorentztransformation für Koordinaten vermischt [2].
- Die – vermeintliche – Auflösung des Zwillingsparadoxons erfolgt teilweise über die Argumentation mittels Asymmetrie bzw. Bezugsystemwechsel eines Beobachters; ebenso werden fälschlicherweise die Beschleunigung als Ursache der Zeitdilatation bzw. als Lösung des Zwillingsparadoxons oder eine vermeintliche Unstetigkeit aufgrund des Bezugsystemwechsels genannt.
- Die Argumentation fokussiert auf Spezialfälle, daher sind Verallgemeinerungen schwierig, insbs. bzgl. der Allgemeinen Relativitätstheorie [3]; teilweise sind die aus den Spezialfällen folgenden Schlussfolgerungen im Allgemeinen falsch.

[1] Experimentelle Tests werden (noch) nicht diskutiert.

[2] In der englischen Fachliteratur findet man die Präzisierung der *time dilation* explizit für Koordinatenzeiten in Inertialsystemen, jedoch *differential aging* für Eigenzeiten im Kontext des Zwillingsparadoxons, insbs. auch für nicht-inertiale Beobachter.

[3] Die folgende Darstellung ist für Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie gleichermaßen gültig; Ausnahemn werden explizit genannt, zum Beispiel durch Hinweis auf eine flache Raumuzeit.

- Der Bezug zu Observablen d.h. messbaren Größen ist bei Betrachtung ausschließlich inertialer Beobachter nur sehr indirekt möglich.

Nicht zuletzt ist Einsteins induktive Herangehensweise zwar genial, aus heutiger Sicht jedoch – da die vollständige Theorie vorliegt – im Sinne der Verständlichkeit nicht unbedingt optimal.

Daher soll im Folgenden ein eher deduktiver, geometrischen Ansatz diskutiert werden, der Spezialfälle und daraus resultierende Fehlinterpretationen von vornherein vermeidet, direkt hin zur Allgemeinen Relativitätstheorie verallgemeinert werden kann und auf invariante Observablen fokussiert, die auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie zur Verfügung stehen.

Dies umfasst insbesondere

- eine koordinatenfreie Definition der Eigenzeit
- die möglicht weitgehende Ausrichtung der Erläuterungen an kovarianten Konzepte
- die Vermeidung der Identifizierung von Koordinaten- und Eigenzeiten
- die Vermeidung der Einstein-Synchronisation, die Konstruktion von Beobachtern zugeordneten Gleichzeitigkeitshyperflächen und die Interpretation der Koordinatenzeiten
- den Verzicht auf die Lorentztransformationen, die eine Transformation zwischen Koordinitensystemen darstellt, nicht zwischen Eigenzeiten

– außer, um den Anschluss an andere Darstellungen zu ermöglichen.

Zur Invarianz der Eigenzeit

Betrachtet man verschiedene Beobachter in der Raumzeit, so kommt jedem Beobachter eine invariante Eigenzeit zu. Nun haben doch aber verschiedene Beobachter verschiedene Eigenzeiten – wie kann also "die Eigenzeit" eine Invariante sein?

Die Lösung lautet wie folgt: *Jedem* Beobachter wird seine *je eigene*, invariante Eigenzeit zugewiesen; d.h. "die Eigenzeit" existiert nicht. Eine Invariante ist eine Größe, die in *unterschiedlichen* Bezugsystemen den *selben* Wert aufweist. Mit dem Wechsel des Bezugsystems ändern sich lediglich die Koordinaten als Hilfsgrößen zur Berechnung, *nicht* jedoch die eindeutig definierte, berechnete und beobachtete Invariante [4].

Zur Definition von Ereignissen, Weltlinien und Eigenzeiten

Jedem Beobachter wird entlang seiner Weltlinie C zwischen zwei auf dieser Weltlinien liegenden, eindeutig und invariant definierten Ereignissen E_a und E_b die invariante Eigenzeit $\tau[C]$ zugeordnet. Die Ereignisse sind örtlich und zeitlich invariant charakterisiert [5].

Die mathematische Definition der Eigenzeit zwischen E_a und E_b entlang C lautet

$$\tau[C] = \int_C d\tau \tag{1}$$

[4] Wenn ein Beobachter ein Eigenzeitintervall auf seiner Stoppuhr abliest, dann wird dadurch, dass andere Beobachter in anderen Bezugsystemen die selbe Stoppuhr ablesen, das Ergebnis der Ablesung für keinen Beobachter verändert. Bzgl. der Ablesung auf der mit einem Beobachter mitbewegten Uhr stimmen alle weiteren Beobachter darin überein, dass für diesen einen Beobachter eine eindeutig definierte Zeitspanne vergangen ist und dass anderen Beobachtern ebenfalls dieser Wert angezeigt wird.

[5] Die Ereignisse werden nicht mittels Koordinatenorten und -zeiten definiert, da verschiedene Beobachter unterschiedliche Koordinaten nutzen können.

Dabei handelt es sich um eine rein geometrische, koordinatenfreie und daher *manifest invariante* Definition mittels eines verallgemeinerten Maßes $d\tau$ in der vierdimensionalen, zunächst flachen Raumzeit. Die Definition kann jedoch unverändert auf ein Maß $d\tau$ in einer gekrümmten Raumzeit d.h. für eine pseudo-riemannsche Mannifaltigkeit übertragen werden.

Man beachte, dass diese Definition kein Koordinaten- bzw. Bezugsystem erfordert und somit unmittelbar für *beliebige* Systeme gilt.

Neben dem nullten Beobachter mit Weltlinie $C = C_0$ betrachten wir eine Schar weiterer Beobachter $1, 2 \ldots$, deren Reisebeginn und -ende mit E_a und E_b zusammenfallen, die jedoch dazwischen unterschiedliche Weltlinien $C_1, C_2 \ldots$ durchlaufen, z.B. mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten und/oder Routen. Damit erhalten wir neben der Eigenzeit $\tau[C]$ die Eigenzeiten $\tau[C_1], \tau[C_2] \ldots$

Ein beliebiger Beobachter mit Weltlinie C_m ordnet einer beliebigen anderen Weltlinien C_n die Eigenzeit $\tau[C_n]$ zu; diese sind im o.g. Sinne invariant.

Kein Zwillingsparadoxon

Für unterschiedliche Weltlinien $C_m \neq C_n$ zwischen den festen Ereignissen E_a und E_b erhält man im allgemeinen unterschiedliche Eigenzeiten mit einem Gangunterschied

$$\Delta\tau_{m,n} = \tau[C_m] - \tau[C_n] \neq 0 \tag{2}$$

Zu verschiedenen Darstellungen der Eigenzeit

Neben der invarianten *Definition* mittels der verallgemeinerten Länge einer Kurve in der 4-dim. Raumzeit

$$\tau[C] = \int_C d\tau$$

werden zur konkreten Berechnung weitere – nun koordinatenabhängige – Darstellungen der Eigenzeit verwendet.

Kurve in der 4-dim. Raumzeit unter Verwendung von beliebigen Koordinaten x^μ sowie der 4er-Geschwindigkeit u^μ als Tangenteneinheitsvektor an die Kurve C:

$$\begin{aligned} u^\mu &= \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \\ u^2 &= u_\mu\, u^\mu = 1 \\ \tau[C] &= \int_C \sqrt{dx_\mu\, dx^\mu} = \int_C d\tau\, \sqrt{u_\mu\, u^\mu} \end{aligned}$$

wobei

$$\tau[C] = \int_C d\tau\, u(\tau)$$

die formale Äquivalenz zur Länge einer Kurve im 3-dim. Raum zeigt [6].

Kurve in der 4-dim. Raumzeit unter expliziter Verwendung der Metrik $g_{\mu\nu}$, insbs. für gekrümmte Raumzeiten:

$$\tau[C] = \int_C \sqrt{dx_\mu \, dx^\mu} = \int_C \sqrt{g_{\mu\nu} \, dx^\mu \, dx^\nu}$$

Kurve im 3-dim. Raum mit dem Spezialfall einer ultra-statischen 4-Metrik, Projektion $C^{(3)} = \hat{P}^{(3)} C$ auf die 3-dim. raumartige Hyperfläche $M^{(3)} \perp x^0$ mit Koordinaten x^i und induzierter 3-Metrik g_{ik} auf $M^{(3)}$:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= (1, g_{ik}) \\ v^i &= \frac{dx^i}{dx^0} \\ \tau[C] &= \int_C \sqrt{g_{\mu\nu} \, dx^\mu \, dx^\nu} = \int_{C^{(3)}} dx^0 \, \sqrt{1 - g_{ik} v^i v^k} \end{aligned}$$

Kurve im 3-dim. Raum, Spezialfall einer flachen Raumzeit mit trivialer Metrik:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= (1, g_{ik}) = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1) \\ \tau[C] &= \int_{C^{3)}} dx^0 \, \sqrt{1 - (v^i)^2} = \int_0^T dt \, \sqrt{1 - (v^i)^2} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt mittels Identifizierung $t = x^0$ mit t als Koordinatenzeit und entspricht der bekannten Darstellung der speziellen Relativitätstheorie.

Zur Lorentztransformation

Die Lorentztransformation ist im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie eine Transformation zwischen Inertialsystemen, nicht jedoch zwischen Eigenzeiten verschiedener nicht-inertialer Beobachter. Da aufgrund der fast ausschließlichen Betrachtung inertialer Beobachter Eigen- und Koordinatenzeiten oft identifiziert werden, wird dieser – im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie essentielle – Unterschied nicht klar.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie existieren zwei unabhängige Symmetrien:

1. zum einen unter lokalen Koordinatentransformationen [7] in der *gekrümmten* Raumzeit, dargestellt durch eine pseudo-riemannschen Mannigfaltigkeit M,
2. zum anderen unter lokalen Lorentztransformationen auf den *flachen* Kotangentialräumen [8] $T_P^* M$ an die Mannigfaltigkeit M in allen [9] Punkten $P \in M$.

Formal gilt

[6] Hier wäre die gewöhnliche invariante Länge einer Kurve mittels der gewöhnlichen Geschwindigkeit entlang der Kurve zu berechnen.

[7] Sogenannte Diffeomorphismen, d.h. bijektiven, stetig differenzierbaren Abbildungen zwischen offenen Mengen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten mit ebensolcher Umkehrabbildung

[8] Jeder einzelne Kotangentialraum hat die Struktur eines flachen Minkowskiraumes.

[9] Die Gesamtheit aller Kotangentialräume über M wird als Kotangentialbündel $T^* M = \bigsqcup_P T_P^* M$ bezeichnet.

1. neue Koordinaten $\bar{x}^\mu(x)$ als Funktionen der alten Koordinaten x^μ auf M, sowie Transformation von Vektorfeldern (Tensoren höherer Stufe analog):

$$
\begin{aligned}
x^\mu &\to \bar{x}^\mu(x) \\
J_\mu{}^\nu(x) &= \partial_\mu \bar{x}^\nu(x) \\
V^\mu(x) &\to \bar{V}^\mu(\bar{x}) = J^\mu{}_\nu(x)\, V^\nu(x)
\end{aligned}
$$

2a. Tetraden-Felder [10] [11] $e^a(P),\ a = 0 \ldots 3$ als lokale Orthonormalbasen auf $T_P^* M$

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \eta_{ab}\, e_\mu{}^a\, e_\nu{}^b \\
e^a &= e^a{}_\mu\, dx^\mu \\
dx^\mu &= e^\mu{}_a\, e^a \\
V^a &= e^a{}_\mu\, V^\mu
\end{aligned}
$$

2b. Lorentzinvarianz als Basistransformation lokal je einzelnem $T_P^* M$, *unabhängig* von den Koordinaten x^μ:

$$
e^a \to \tilde{e}^a = \Lambda^a{}_b\, e^b
$$

Das invariante Linienelement entsprechend der Eigenzeit lautet

$$
d\tau^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = (\eta_{ab}\, e^a{}_\mu\, e^b{}_\nu)\,(e^\mu{}_c\, e^c)\,(e^\nu{}_d\, e^d) = \eta_{ab}\, e^a\, e^b
$$

Wegen $g_{\mu\nu}\, e^\mu{}_0\, e^\nu{}_0 = \eta_{00} = 1$ kann man $e^\mu{}_0 = u^\mu$ mit einer lokalen Vierergeschwindigkeit identifizieren.

Auf der Mannigfaltigkeit M existieren keine Lorentztransformationen, die Koordinaten oder Basen an *verschienenen* Raumzeitpunkten zueinander in Beziehung setzen. Lokale Lorentzinvarianz entspricht der Freiheit der Wahl der Basen $e^a(P), \tilde{e}^a(P) \ldots$ je Kotangentialraum $T_P^* M$; dies ist von der Freiheit der Wahl von Koordinaten $x^\mu(P), \bar{x}^\mu(P) \ldots$ auf der Mannigfaltigkeit M zu unterscheiden. Die Koordinaten zu $x^a(P)$ entsprechend $e^a(P)$ sowie die Lorentztransformationen $e^a \to \tilde{e}^a = \Lambda^a{}_b\, e^b$ gelten lokal *in* in $T_P^* M$, *nicht* in M oder entlang C.

Unterschiedliche Bezugsysteme in einem Punkt P entsprechen unterschiedlichen Basen im Kotangentialraum $T_P^* M$. Die Bedingung $e^\mu{}_0 = \delta^{\mu,0}$ wählt ein spezielles, "mitbewegtes" System aus, entsprechend der Wahl einer speziellen raumartigen Projektion in $T_P^* M$. Verschiedenen $e^a(P), \tilde{e}^a(P) \ldots$ entsprechen unterschiedlichen Projektionen je $T_P^* M$. Der Zusammenhang zwischen x^a und $\tilde{x}^a$ wird durch Lorentzboosts $\tilde{e}^a = \Lambda^a{}_b\, e^b$ vermittelt. Die entsprechende Zeitdilatation zwischen $x^{a=0}$ und $\tilde{x}^{a=0}$ ist ein rein lokales Artefakt *in* $T_P^* M$ aufgrund der raumartigen Projektionen und darf nicht mit der physikalisch messbaren Zeitdilatation zwischen Eigenzeiten realer Beobachter *entlang* verschiedener Kurve $C_1, C_2 \ldots$ identifiziert werden.

[10] engl. *frame fields*; der Begriff verdeutlicht, dass die $e^a(P)$ Felder auf M sind.

[11] Es gilt

$$
\begin{aligned}
e^a &= e^a{}_\mu\, dx^\mu; \qquad & e_a &= e_a{}^\mu\, \partial_\mu \\
e^a{}_\mu\, e^\mu{}_b &= \delta^a{}_b; \qquad & e^\mu{}_a\, e^a{}_\nu &= \delta^\mu{}_\nu
\end{aligned}
$$

Zur Invarianz der Eigenzeit

Die Eigenzeit $\tau[C]$ ist eine Invariante bzgl. der beiden oben diskutierten Symmetrien

1. der Koordinatentransformationen

$$
\begin{aligned}
x^\mu &\to \bar{x}^\mu \\
g_{\mu\nu} &\to \bar{g}_{\mu\nu} \\
g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu &\to \bar{g}_{\mu\nu}\, d\bar{x}^\mu\, d\bar{x}^\nu = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \\
\tau[C] &\to \tau[C]
\end{aligned}
$$

2. sowie der lokalen Lorentztransformationen

$$
\begin{aligned}
e^a &\to \tilde{e}^a = \Lambda^a{}_b\, e^b \\
\eta_{ab} &\to \tilde{\eta}_{ab} = \eta_{ab} \\
\eta_{ab}\, e^a\, e^b &\to \tilde{\eta}_{ab}\, \tilde{e}^a\, \tilde{e}^b = \eta_{ab}\, e^a\, e^b \\
\tau[C] &\to \tau[C]
\end{aligned}
$$

Speziell für Poincaretransformationen (= Lorentztransformationen plus Translationen) in der flachen Raumzeit sowie unter Verwendung kartesischer Koordinaten fallen beide Konzepte zusammen und man erhält die bekannte Formel

$$
\begin{aligned}
x^\mu &\to \bar{x}^\mu \\
\tau[C] &= \int_0^T dt\, \sqrt{1-(v^i)^2} = \int_{\bar{0}}^{\bar{T}} d\bar{t}\, \sqrt{1-(\bar{v}^i)^2}
\end{aligned}
$$

Geodäten als Weltlinien maximaler Eigenzeit

Geodäten als Verallgemeinerungen gerader und kürzester Kurven C zwischen zwei Ereignissen E_a und E_b entsprechen Weltlinien maximaler Eigenzeit.

Dazu betrachtet man beliebige, infinitesimale Variationen $\delta C \to \delta x^\mu$ einer Kurve C und leitet daraus die Variation der Eigenzeit $\delta\tau[C] = \tau[C+\delta C] - \tau[C]$ ab:

$$
\begin{aligned}
\delta \int_C d\tau &= \int_C d\tau\, g_{\mu\nu}\, \delta x^\mu\, (\nabla_u u)^\nu \\
(\nabla_u u)^\mu &= \dot{u}^\mu + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda}\, u^\kappa\, u^\lambda
\end{aligned}
$$

$(\nabla_u u)^\mu$ entspricht der kovarianten Richtungsableitung d.h. dem auto-parallelen Transport ∇_u von u^μ in Richtung des Tangentialeinheitsvektors u^μ entlang C.

Aus der Forderung einer verschwindenen Variation $\delta\tau[C]$ bis einschließlich erster Ordnung in der Variation δx^μ der Kurve [12] folgt für nicht-verschwindendes δx^μ die Geodätengleichung

[12] entsprechend der Extremums-Bedingung des Verschwindens der ersten Ableitung

$$\nabla_u u = 0 \tag{3}$$

Dies entspricht identisch verschwindender kovarianter Viererbeschleunigung a^μ entlang einer Geodäten [13].

Man beachte, dass eine Geodäte – analog zur Eigenzeit – koordinatenfrei definiert ist.

Damit spielt die Viererbeschleunigung keine Rolle bei der Berechnung der Eigenzeit: sie ist in den Gleichungen für $\tau[C]$ nicht enthalten; sie verschwindet entlang aller Geodäten, obwohl für diese nicht-verschwindende Eigenzeiten existieren; infinitesimale Abweichungen von Geodäten mit nicht-verschwindender Viererbeschleunigung $a^\mu \neq 0$ führen dennoch zu verschwindender infinitesimaler Variation der Eigenzeit $\delta\tau[C] = 0$.

Einsteins Uhrenhypothese

Die *Uhrenhypothese* besagt, dass Standarduhren zur Verfügung stehen, die nicht von einer auf sie wirkenden Beschleunigung beeinflusst werden, sondern identisch zu idealen Uhren funktionieren. Erst mittels dieser Hypothese folgt, dass die reale bzw. gemessene Eigenzeit für beschleunigte Bewegungen *tatsächlich* durch den o.g. theoretischen Ansatz gegeben ist, d.h. dass

$$\tau_{\text{measured}}[C] \stackrel{!}{=} \int_C d\tau \tag{4}$$

für beliebige Weltlinien C gilt.

Theoretisch ist dies offensichtlich, da die Beschleunigung entlang C für die Berechnung von $\tau[C]$ irrelevant ist; sie tritt in den Formeln nicht auf. Eine experimentelle Überprüfung und Bestätigung der Uhrenhypothese erfolgte an Ringbeschleunigern mit Beschleunigungen von bis zu $10^{18}g$.

Zum Zwillingsparadoxon für Kreisbahnen - flache Raumzeit

Betrachtet man in der flachen Minkowski-Raumzeit Weltlinien C_0 für einen ruhenden Beobachter sowie C_v für eine Schar kreisförmig bewegter Beobachter mit jeweils konstanter Bahngeschwindigkeit $v = \text{const.}$, so folgt für die Eigenzeiten nach einem vollständigen Umlauf der Kreisbahnen, d.h. für zwei aufeinanderfolgende Ereignisse E_a, E_b, bei denen sich C_0 und C_v berühren

$$\begin{aligned}\tau_0 &= T \\ \tau_v &= \sqrt{1-v^2}\cdot T\end{aligned}$$

Die Eigenzeit entlang einer beschleunigten, kreisförmigen Weltlinie berechnet sich – formal identisch – ausschließlich über die Geschwindigkeit, entsprechend dem Fall einer geradlinigen, unbeschleunigten Weltlinie.

Eine experimentelle Überprüfung und Bestätigung folgt mittels präziser Messungen der Lebensdauern von Elementarteilchen in Ringbeschleunigern.

[13] Im Falle einer externen Kraft f wird die Geodätengleichung zu $\nabla_u u = a = f/m$ erweitert; dies bedeutet umgekehrt, dass Geodäten kräftefreien Weltlinien mit $a = f/m = 0$ entsprechen.

Zum Zwillingsparadoxon für Kreisbahnen - Schwarzschild-Raumzeit

Betrachtet man in der Schwarzschild-Raumzeit

$$
\begin{aligned}
d\tau^2 &= f\,dt^2 - f^{-1}\,dr^2 - r^2\,d\Omega^2 \\
f(r) &= 1 - \frac{r_S}{r}
\end{aligned}
$$

kreisförmige Orbits $C_{r,\omega}$ mit jeweils konstantem Radius $r = \text{const.}$, Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ in der Äquatorialebene $\theta = \pi/2$, so erhält man die Vierergeschwindigkeit $u^\mu = (u^t, u^r, u^\theta, u^\phi)$

$$
\begin{aligned}
u^\mu &= \gamma^{-1}(1,0,0,\omega) \\
\gamma &= \frac{dt}{d\tau} \\
\omega &= \frac{d\phi}{dt}
\end{aligned}
$$

Aus der Normierungsbedingung $u_\mu\, u^\mu = 1$ folgt

$$
\gamma^{-2} = f - r^2\omega^2(t)
$$

Für die Eigenzeiten $\tau[r,\omega]$ nach einem vollständigen Umlauf der Kreisbahn

$$
\int_0^T dt\,\omega(t) = 2\pi
$$

folgt

$$
\tau[r,\omega] = \int_0^T dt\,\sqrt{f - r^2\omega^2(t)}
$$

Speziell für Geodäten mit $\omega_0 T = 2\pi$ gilt

$$
\begin{aligned}
r^2\omega_0^2 &= \frac{r_S}{2r} \\
\gamma^{-2} &= f - \frac{3r_S}{2r} \\
\tau[r,\omega] &= \sqrt{f - r^2\omega_0^2}\cdot T
\end{aligned}
$$

Für einen stationären Beobachter bei festem Radius r und $\omega = 0$ folgt $\gamma^{-2} = f$.

Zum Zwillingsparadoxon in kompakten Raumzeiten

In kompakten Raumzeiten folgt das Zwillingsparadoxon für Eigenzeiten zweier inertialer Beobachter ohne Bezugsystemwechsel sowie ohne Beschleunigung.

Man betrachte die raumartige Kompaktifizierung der flachen 2-dim. Minkowski-Raumzeit $M^{(2)} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\Gamma) = \mathbb{R} \times S^1$ zu einem Zylinder [14].

Man identifiziert dabei *gleichzeitige* Raumzeitpunkte mittels der Gittervektoren Γ_n

$$\begin{aligned} x^\mu &\sim x^\mu + \Gamma^\mu_n; \quad n \in \mathbb{Z} \\ \Gamma^\mu_n &= (0,n)\,L \end{aligned}$$

für eine feste Länge L.

Diese Äquivalenzrelation $\sim$ ist jedoch nicht forminvariant unter Lorentztransformationen

$$\begin{aligned} x^\mu &\to \bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu \\ \Gamma^\mu_n &\to \bar{\Gamma}^\mu_n = \Lambda^\mu{}_\nu\, \Gamma^\nu_n \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{x}^\mu &\sim \bar{x}^\mu + \bar{\Gamma}^\mu_n \\ \bar{\Gamma}^\mu_n &= (-\beta n, n)\,\gamma L \end{aligned}$$

da dadurch die Gleichzeitigkeitsbedingung für das Gitter verletzt wird. Die Kompaktifizierung zeichnet demzufolge ein bevorzugtes Bezugsystem aus [15].

Für den Umlauf eines inertialen Beobachters C_v mit Geschwindigkeit $v = \text{const.}$ bezogen auf einen Beobachter C_0, dessen Ruhesystem diesem bevorzugten Bezugsystem entspricht, folgt für die Eigenzeiten nach einem vollständigen Umlauf mit $T = L/v$

$$\begin{aligned} \tau_0 &= T \\ \tau_v &= \sqrt{1-v^2} \cdot T \end{aligned}$$

Diese Überlegung gilt für sämtliche Paare von Zwillingen $n = 1,2$ mit unterschiedlichen Windungszahlen [16] $N[C_n]$. Eine Verallgemeinerung für gekrümmte Raumzeiten ist möglich.

[14] Die Notation deutet an, dass diese Kompaktifizierung für höherdimensionale Raumzeiten mittels eines Gitters Γ zu entsprechenden Tori verallgemeinert werden kann.

[15] Dieses Bezugsystem kann auch praktisch ermittelt werden: nur in diesem System werden entgegengesetzt und gleichzeit ausgesandte Lichtstrahlen nach einem Umlauf auch wieder gleichzeitig empfangen.

[16] Streng genommen ist die Windungszahl nicht für die Weltlinie C sondern für deren raumartige Projektion definiert.

Konstant beschleunigte Beobachter – Rindlerkoordinaten

Man betrachte in der flachen 2-dim. Minkowski-Raumzeit mit Koordinaten $x^\mu = (t,x)$

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2$$

die Weltlinie

$$x^\mu(\tau) = a^{-1}(\sinh a\tau, \cosh a\tau)$$

eines konstant beschleunigten Beobachter mit

$$\ddot{x}_\mu \ddot{x}^\mu = a^2$$

Die Transformation in Rindler-Koordinaten ξ^μ lautet

$$\begin{aligned} x^\mu(\xi) &= \xi^1(\sinh \xi^0, \cosh \xi^0) \\ (x^1)^2 - (x^0)^2 = (\xi^1)^2; &\qquad \frac{x^0}{x^1} = \tanh \xi^0 \\ ds^2 &= -(\xi^1)^2 d(\xi^0)^2 + d(\xi^1)^2 \end{aligned}$$

Für die Weltlinie des Beobachters erhält man [17]

$$\begin{aligned} \xi^\mu(\tau) &= (a\tau, a^{-1}) \\ \dot{\xi}^\mu(\tau) &= u^\mu(\tau) = (a,0) \\ (\nabla_u u)^\mu(\tau) &= a^\mu(\tau) = (0,a) \end{aligned}$$

mit

$$a_\mu a^\mu = a^2$$

Während der Beobachter im mitbewegten momentanen Ruhessystem [18] bei $\xi^1(\tau) = a^{-1}$ verharrt und eine konstante Beschleunigung a in ξ^1-Richtung erfährt, die aufgrund von $g_{00}(\xi) = -(\xi^1)^2$ der eines konstanten Gravitationsfeldes in der *Umgebung* von $\xi^1 = a^{-1}$ entspricht, lautet das Linienelement exakt *auf* Weltlinie

$$ds^2\big|_{\xi^1 = a^{-1}} = d\tau^2 g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -d\tau^2$$

Die Eigenzeit des beschleunigten Beobachters enthält keinen speziellen Beitrag aus dessen Beschleunigung!

[17] Man beachte, dass die Beschleunigung a in krummlinigen Koordinaten mittels der kovarianten Richtungsableitung $\nabla_u u$ entlang C zu berechnen ist.

[18] engl.: *proper frame*

Zur kontinuierlichen, wechselweisen Beobachtung der Eigenzeiten

Teilweise findet man die irrige Annahme, dass Zeiten im Zuge des Zwillingsparadoxons diskontinuierlich wären bzw. dass sich die unterschiedlichen Zeiten erst beim lokalen Ablesen beider Uhren am gemeinsamen Endpunkt der Reisen manifestieren würden.

Gegeben seien zwei zeitartige Weltlinien $n = 1,2$

$$C_n : \tau \to P_n(\tau)$$

wobei die Eigenzeiten τ auf Punkte $P(\tau)$ auf den Weltlinien abgebildet werden. Diese Abbildungen sind Bijektionen, da auf zeitartigen Weltinien C_n die Eigenzeiten streng monoton sind [19].

Man betrachte nun zu jedem Punkt $P \in C_1$ auf der ersten Weltlinie den Zukunftslichtkegel, d.h. die lichtartigen Berandung $\dot{J}^+(P)$ der Zukunft $J^+(P)$ von P sowie den Schnittpunkt [20]

$$J_{2,1} : P \to Q(P) = \dot{J}^+(P) \cap C_2$$

dieses Zukunftslichtkegels mit der zweiten Weltlinie [21].

Dem Punkt $Q(P)$ entspricht aufgrund der o.g. Bijektion wiederum eine eindeutig definierte Eigenzeit $\tau_2(Q)$. Damit erhalten wir die Abbildung

$$C_2^{-1} \circ J_{2,1} \circ C_1 : \tau_1 \to \tau_2(\tau_1))$$

d.h. wir ordnen der Ablesung jeder Eigenzeit $\tau_1(P)$auf C_1 den Empfang der mittels Lichtsignal von P nach $Q(P)$ übertragenen Eigenzeit sowie deren Ablesung bei $\tau_2(Q)$ auf C_2 zu.

Die Verknüpfung dieser stetigen Abbildungen ist wiederum stetig. Der Beobachter auf C_2 erhält somit die Eigenzeiten τ_1 des anderen Beobachters auf C_1 als stetige Funktion seiner Eigenzeit τ_2.

Man beachte, dass für diese Betrachtung keine Konstruktion von Gleichzeitigkeits-Hyperflächen notwendig ist, da nicht die prinzipiell *unbeobachtbare* Eigenzeit des jeweils anderen Beobachters auf einer Gleichzeitigkeits-Hyperflächen sondern die *beobachtbare* Eigenzeit auf dem jeweiligen Vergangenheitslichtkegel betrachtet wird.

Einfaches Beispiel: die von einem bewegten Beobachter 1 mit Weltlinie $\left(t, x(t) = \int_0^t ds\, v(s)\right)$ bei Koordinatenzeit t abgelesenen Eigenzeiten $\tau_1(t) = \int_0^t ds \sqrt{1 - v^2(s)}$ werden mittels Lichtsignalen an einen bei $x = 0$ ruhenden Beobachter 2 übertragen und bei $(\tau_2 = t + x(t), 0)$ empfangen.

[19] Das folgt trivialerweise aus $\dot{\tau} = 1 > 0$.

[20] Hier wird ohne Beweis vorausgesetzt, dass der Schnittpunkt beliebiger zeitartiger Weltlinien mit beliebigen Zukunftslichtkegeln erstens immer existiert und zweitens immer eindeutig ist. Ersteres ist im Allgemeinen nicht gegeben, jedoch sicher falls sich Weltlinien beider Beobachter wieder treffen.

[21] Natürlich gilt sowohl $Q \in \dot{J}^+(P)$ als auch $P \in \dot{J}^-(Q)$.