Sei eine Hutverteilung definiert als Abbildung

$$f:\ \mathbb{N}\ \rightarrow\ \{0,1\}^{|\mathbb{N}|}$$

die jedem Sünder $n\in\mathbb{N}$ die Hutfarbe $f(n)$ zuordnet. Sei $F=\{f(n)\}$ die Menge der möglichen Hutverteilungen.

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation, gemäß derer zwei Hutverteilungen dann äquivalent sind, wenn sie sich an höchstens endlich vielen Stellen unterscheiden

$$f_1\sim f_2\ \iff\ \|\ f_1,f_2\ \|=\sum_n|f_1(n)-f_2(n)|\ <\ \infty$$

Seien

$$[f]\ =\ \{g\in F:\ g\sim f\}$$

$$F/_{\sim}\ =\ \{[f]:\ f\in F\}$$

die Äquivalenzklassen sowie die Quotientenmenge von F bzgl. $\sim$, d.h. die Menge aller Äquivalenzklassen.

Aus dem Auswahlaxioms $\mathbf{C}$ folgt die Existenz einer bijektiven Funktion $\mathbf{c}:\ F/_{\sim}\ \rightarrow\ F$ mit

$$\mathbf{C}\ \Longrightarrow\ \exists\mathbf{c}:\ \mathbf{c}[f_1]\ =\ \mathbf{c}[f_2]\ \iff\ f_1\sim f_2$$

die aus jeder Äquivalenzklasse $[f]$ genau einen Repräsentanten auswählt.

Zu zeigen ist, dass eine generische Gewinnstrategie

$$\mathbf{s}:\ \mathbb{N}\times F\ \rightarrow\ \{0,1\}^{|\mathbb{N}|}$$

existiert, so dass für jede gegebene Hutverteilung f nur endliche viele Farben falsch geraten werden:

$$\exists\mathbf{s}:\ \forall f\in F:\|\ \mathbf{s}(n),f(n)\ \|<\ \infty$$

Zum Beweis betrachtet man zunächst die eindeutige Projektion $\pi:\ F\ \rightarrow\ F/_{\sim}$

$$\pi(f)\ =\ [f]$$

einer Hutverteilung auf die Äquivalenzklasse, die Auswahlfunktion $\mathbf{c}:\ F/_{\sim}\ \rightarrow\ F$ sowie die Verkettung $\mathbf{c}\circ\pi:\ F\ \rightarrow\ F$

$$\mathbf{s}\ =\ \mathbf{c}[f]\ =\ (\mathbf{c}\circ\pi)(f)\ \sim\ f$$

Die Strategie $\mathbf{s}$ leistet das Gewünschte, da sich die von ihr gelieferte Hutverteilung $\mathbf{s}(n)$ nur an endlich vielen Stellen von der tatsächlich vorliegenden $f(n)$ unterscheidet.

Im Zuge des Ratens ist jedoch f selbst nicht bekannt, sondern lediglich je Sünder n die auf $\mathbb{N}\setminus\{n\}$ beschränkte Hutverteilung $f|_{\neq n}$. Allerdings liefert diese aufgrund der Äquivalenz

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ f|_{\neq n}\sim f\ \Longrightarrow\ \pi(f|_{\neq n})\ =\ \pi(f)\ =\ [f]$$

die selbe Äquivalenzklasse und daher

$$\forall f\in F,\forall n\in\mathbb{N}:\ \exists\mathbf{s}\ =\ \mathbf{c}[f]\ =\ (\mathbf{c}\circ\pi)(f|_{\neq n})\ \sim\ f\qquad\blacksquare$$

Mittels der Abbildung $F \to]0,1[\subset \mathbb{R}$

$$f \to x(f) \;=\; \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) \cdot 2^{-n}$$

sowie der Äquivalenzrelation

$$x_1 \;\sim\; x_2 \;\iff\; \exists (q,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : x_1 - x_2 \;=\; q \cdot 2^{-k}$$

wird das Problem auf das Erraten der Binärdarstellung einer reellen Zahl x im offenen Intervall $]0,1[$ abgebildet.

Aus technischen Gründen wird das offenen Intervall $]0,1[$ verwendet, d.h. zunächst werden $x = 0,1$ ausgeschlossen.

Für *terminierende* Binärbrüche mit $\forall n > N : f(n) = 0$ gilt $x \sim 0$.

Für Binärbrüche mit $f(N) = 0 \wedge \forall n > N : f(n) = 1$ gilt mittels Abtrennen eines terminierenden Teils $x^{(N-1)}$

$$x \;=\; x^{(N-1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \;=\; x^{(N-1)} + 2^{-N} \;\sim 0$$

Diese sind demnach ebenfalls terminierend.

Zusammen mit den Endpunkten wird auch deren gesamte Äquivalenzklasse, d.h. sämtliche terminierenden Binärbrüche, ausgeschlossen. Eine relle Zahl x hat genau dann eine terminierende Binärdarstellung, wenn sie als $x = q \cdot 2^{-k}$ für geeignetes $(q,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ dargestellt werden kann. Bezogen auf die Hutfolgen bedeutet dies, dass mit $x = 0,1$ die beiden *einfarbigen* Hutfolgen ausgeschlossen werden müssen; endlichen Hutfolgen sind ohnehin ausgeschlossen.

Zur Konstruktion von (q,k) betrachtet man $x_1 \sim x_2$. Dann ist

$$x_1 - x_2 \;=\; \sum_{n=1}^{N} d(n) \cdot 2^{-n} \;=\; \left(\sum_{n=1}^{N} d(n) \cdot 2^{N-n} \right) \cdot 2^{-N} \;=\; q \cdot 2^{-k}$$

Zur Ermittlung der Mächtigkeiten betrachtet man die Erzeugung einer Äquivalenzklasse mittels $[x] = \{y : y = x + q \cdot 2^{-k}\}$ für $(q,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

$$|[x]| \;=\; |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| \;=\; \aleph_0$$

$[0,1]$ ist rekonstruierbar mittels der Vereinigung aller jeweils abzählbaren Äquivalenzklassen $[x]$ gemäß

$$[0,1] \;=\; \bigcup_{[x] \in [0,1]/_\sim} [x]$$

Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar, $[0,1]$ jedoch überabzählbar. Daraus folgt

$$|[0,1]/_\sim| \;=\; \mathfrak{c} \qquad \blacksquare$$