

Das Schwarze Loch, wie es dazu kommt und welche Eigenschaften diese Schwarzen Löcher besitzen

Dr. Wilfried Tenten Mai 2007

Einleitung

Die größte Fascination aus Vorhersagen der Gravitationstheorie ist diejenige der Existenz schwarzer Löcher. Das sind Objekte im Weltall von unglaublicher Schönheit, extremster Energieentfaltung sowie extremster Physik. Hier kommt man der Singularität sozusagen hautnah.

Ich möchte zeigen, daß diese Objekte ein Beispiel sind für unser Verständnis der Raumzeit, das uns seit der grundlegenden Arbeiten Einsteins bekannter geworden ist. Die folgenden Darstellungen basieren auf eine symmetrische Anschrift dieser Raumzeit. Erstaunlich ist, daß diese Voraussetzung zunächst keine oder nur unbedeutende Auswirkungen auf die Genauigkeit der Berechnungen hat. Auch werden wir die gekrümmte Raumzeit unter die Lupe nehmen.

Diese Prinzipien können u.a. gefunden werden in:

C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation, San Francisco, 1973, V.
Frolov, I. Novikov, Physics of Black Holes, Kluwer, Dordrecht, 1998

Geometrische Einheiten

Eine sehr nützliche Normierung ist die in der Gravitationstheorie gerne benutzte "geometrische Einheit". Während die linke Seite der Einstein-Gleichung den Krümmungstensor mit seiner Dimension cm^{-2} beschreibt, muß demnach die rechte

Seite die gleiche Dimension haben. Die Gravitationskonstante ist $G = 6.673 \cdot 10^{(-8)}$

$\frac{\text{cm}^3}{\text{g s}^2} = 1$ und die Lichtgeschwindigkeit beträgt $c = 2.998 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 1$,

Damit ergeben sich:

$$\begin{array}{l}
 G / c^2 = .7425 \cdot 10^{(-28)} \quad \text{cm/g} = 1 \\
 c^5 / G = 3.63 \cdot 10^{59} \quad \text{erg/s} = 1 \quad \text{Leistung Einheit} \\
 G / c = 2.23 \cdot 10^{(-18)} \quad \text{Hz} * \text{cm}^2 / \text{g} = 1 \quad \text{Absorptions Charakteristik} \\
 c^2 / \sqrt{G} = 3.48 \cdot 10^{24} \quad \text{CGSE Einheiten} \\
 \text{(Feldstärke)} \\
 h/2 \pi = 1.054 \cdot 10^{(-27)} \quad \text{g} * \text{cm}^2 / \text{s} = 2.612 \cdot 10^{(-66)} \quad \text{cm}^2 \\
 e = 1.381 \cdot 10^{(-34)} \quad \text{cm} \quad \text{Elementarladung} \\
 1 \text{ ps} = 3.0856 \cdot 10^{18} \quad \text{cm} \\
 1 \text{ eV} = 1.324 \cdot 10^{(-61)} \quad \text{cm}
 \end{array}$$

Folgende Extremwerte in Länge, Zeit, Masse und Dichte, die Plack Einheiten, spielen eine sehr große, eine fundamentale Bedeutung:

$$\sqrt{\frac{G h}{2 \pi c^3}} = 1.616 \cdot 10^{(-33)} \text{ cm} \quad \text{Planck Länge}$$

$$\sqrt{\frac{G h}{2 \pi c^5}} = 5.391 \cdot 10^{(-44)} \text{ s} \quad \text{Planck Zeit}$$

$$\sqrt{\frac{h c}{2 \pi G}} = 2.177 \cdot 10^{(-5)} \text{ g} \quad \text{Planck Masse}$$

$$\frac{2 \pi c^5}{h G^2} = 5.157 \cdot 10^{93} \text{ g/cm}^3 \quad \text{Planck Dichte}$$

Beschreibung eines relativistischen Sterns

Die ersten realistischen Metriken wurden von Schwarzschild zur Beschreibung der sphärischen Symmetrie sowie der statischen Raumkrümmung verwendet.

Literatur:

http://de.wikipedia.org/wiki/Karl_Schwarzschild

<http://www.phy.syr.edu/courses/modules/LIGHTCONE/schwarzschild.html>

http://www.mpe.mpg.de/~amueller/astro_sl_schw.html

Dies zeigen folgenden Beziehungen:

<code>g_compts:</code>	Metrik Komponenten
<code>g_compts[1,1]:</code>	Metrik Komponenten im Intervall abgeleitet nach dt ²
<code>g_compts[2,2]:</code>	Metrik Komponenten im Intervall abgeleitet nach dr ²
<code>g_compts[3,3]:</code>	Metrik Komponenten im Intervall abgeleitet nach dtheta ²
<code>g_compts[4,4]:</code>	Metrik Komponenten im Intervall abgeleitet nach dphi ²
<code>g</code>	Kovarianter Metrik Tensor
<code>ginv</code>	kontravarianter Metrik Tensor

> **restart:**

with(tensor):

with(plots):

with(linalg):

with(diffforms):

**coord := [t, r, theta, phi]:# spherical coordinates,
which will be designated in text as [0,1,2,3]**

g_compts := array(symmetric,sparse,1..4,1..4):

g_compts[1,1] := -exp(2*Phi(r)):

g_compts[2,2] := exp(2*Lambda(r)):

g_compts[3,3] := r^2:

g_compts[4,4] := r^2*sin(theta)^2:

g := create([-1,-1], eval(g_compts));

ginv := invert(g, 'detg');

Warning, the name `changecoords` has been redefined

Warning, the protected names `norm` and `trace` have been redefined and unprotected

$$g := \text{table}([\text{compts} = \begin{bmatrix} -e^{(2\Phi(r))} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(2\Lambda(r))} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}, \text{index_char} = [-1, -1])$$

$$g_{\text{inv}} := \text{table}([\text{compts} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{e^{(2\Phi(r))}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e^{(2\Lambda(r))}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2} \end{bmatrix}, \text{index_char} = [1,$$

Wir verwenden die Standard MAPLE Prozedur für die Einstein'sche Tensor Definition

Zwischenergebnisse

Die Idee:

Der Raum ist gekrümmt. Diese Krümmung wird mit Hilfe des Gaußschen Krümmungsmaßes der Fläche, das damit auch seine Bezeichnung als Krümmungstensor gerechtfertigt. Bei geodätischer Übertragung lassen sich seine Ableitungen als Aggregate der Ableitungen der metrischen Fundamentalgrößen d_{ij} beschreiben. Geodätisch heißt, daß die Koordinaten in nichteuklid'scher Weise (nichtlinear) angegeben werden. Auf der Erde sind das meist Kugelkoordinaten. Bekannter Satz daraus:

Die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist der Großkreis

oder den Seefahrern bekannt

Schneidet ein Kurs die Längengrade stets unter gleichem Winkel, wird die Kurslinie Loxodrome genannt.

Damit ist auch die Verwendung der Christoffelsymbole für die Indizierung der ersten und zweiten Art verbunden. Aggregate nennt man die Komponentenschriften der Achsen z.B. $A_{(ij-j_i)}$ usw.

Das ergibt sich aus der Summenbildung und deren Kurzanschrift. Der Krümmungstensor ist auch unter dem Namen: Riemann-Christoffel-Tensor, manchmal auch kurz Riemann-Tensor genannt, bekannt. Die erste Verjüngung desselben wurde von RICCI als symmetrisch erkannt. Daher trägt diese erste

Verjüngung

den Namen Ricci-Tensor. Unter Verjüngung versteht man auch Spurbildung. Hierbei wird die Stufe eines Tensors um zwei Stufen reduziert. Diese besteht in der Gleichsetzung zweier Indices: eine ko- und eines kontravarianten Index. Anschließend wird über beide Indices summiert.

Der Ricci Tensor ist ein Maßtensor. Er gibt Aufschluß über die Krümmung des Raums.

Der Riemann-Tensor beschreibt die relative Beschleunigung benachbarter Geodäten und damit auch die durch Gravitation verursachten lokalen Kräfte und Spannungen innerhalb eines ausgedehnten Körpers, die sogenannten Gezeitenkräfte.

Literatur:

<http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/relativity/node94.html>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Friedmann-Gleichungen> Hier ist die schöne Herleitung der Friedmann Gleichung

zs sehe, welche diesen omonösen

Faktor 8π herleitet!

```
> D1g := d1metric( g, coord );
D2g := d2metric( D1g, coord );
Cf1 := Christoffell ( D1g );
RMN := Riemann( ginv, D2g, Cf1 );
RICCI := Ricci( ginv, RMN );
RS := Ricciscalar( ginv, RICCI );
```

Estn ist der Einstein Tensor non_zero sind seine von Null verschiedenen Komponenten

```
> Estn := Einstein( g, RICCI, RS );
displayGR(Einstein,Estn);
```

The Einstein Tensor

non-zero components :

$$G_{11} = - \frac{e^{(2\Phi(r))} \left(2 \left(\frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) r + e^{(2\Lambda(r))} - 1 \right)}{r^2 e^{(2\Lambda(r))}}$$

$$G_{22} = - \frac{2 r \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) - e^{(2\Lambda(r))} + 1}{r^2}$$

$$G_{33} = \frac{r \left(\left(\frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) - \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) - r \left(\frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) \right) - r \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right)^2 + r \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) \left(\frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) \right)}{e^{(2\Lambda(r))}}$$

$$G_{44} = -r \left(\left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) - \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) \cos(\theta)^2 - \left(\frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) + \left(\frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) \cos(\theta)^2 \right. \\ \left. + r \left(\frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) \right) - r \left(\frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) \right) \cos(\theta)^2 + r \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right)^2 - r \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right)^2 \cos(\theta)^2 \right. \\ \left. - r \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) \left(\frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) + r \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) \left(\frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) \cos(\theta)^2 \right) / e^{(2\Lambda(r))}$$

character : [-1, -1]

Wir gehen zunächst vom bekannten Ansatz der Sternbeschreibung als Flüssigkeit aus. In diesem Fall ist der Energie-Momenten oder Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mu, \nu} = (p + \rho) u_{\mu} u_{\nu} + p g_{\mu, \nu} \quad (\text{alle Komponenten von } u \text{ mit Ausnahme } u_0 \text{ sind gleich } 0 \text{ und } -1 = g^{(0,0)} u_0);$$

Die Signatur (-2) ergibt sich zu $u_{\alpha} u^{\alpha} = 1$ und $T_{\mu, \nu} = (p + \rho) u_{\mu} u_{\nu} - p g_{\mu, \nu}$;

Der Energie-ImpulsTensor beschreibt den zeitlich-räumlichen Energiefluß durch ein räumliches Winkelsegment in beiden Richtungen.

Sehr schön beschrieben in:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Energie-Impuls-Tensor>

Der Energie-Moment- oder Energie-Impuls-Tensor für einen Flüssigkeitstropfen ist:

```
> T_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4):
T_compts[1,1] := exp(2*Phi(r))*rho(r):
T_compts[2,2] := exp(2*Lambda(r))*p(r):
T_compts[3,3] := p(r)*r^2:
T_compts[4,4] := p(r)*r^2*sin(theta)^2:
T := create([-1,-1], eval(T_compts));
```

$$T := \text{table}([\text{compts}] = \begin{bmatrix} e^{(2\Phi(r))} \rho(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(2\Lambda(r))} p(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(r) r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(r) r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix},$$

`index_char = [-1, -1]`

)

Die Einstein Gleichung kann auch nachgelesen werden in: *W.Pauli, Theory of relativity, Pergamon Press (1958)*

$$G_{\mu, \nu} = -8 \pi T_{\mu, \nu}$$

Jetzt werden wir die Tensor Komponenten entwickeln:

`> Energy_momentum := get_compts(T);`

`Einstein := get_compts(Estn);`

$$\text{Energy_momentum} := \begin{bmatrix} e^{(2\Phi(r))} \rho(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(2\Lambda(r))} p(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(r) r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(r) r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

`Einstein :=`

$$\left[-\frac{e^{(2\Phi(r))} \left(2 \left(\frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) r + e^{(2\Lambda(r))} - 1 \right)}{r^2 e^{(2\Lambda(r))}}, 0, 0, 0 \right]$$

$$\left[0, -\frac{2 r \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) - e^{(2\Lambda(r))} + 1}{r^2}, 0, 0 \right]$$

$$\left[0, 0, \frac{r \left(\left(\frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) - \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) - r \left(\frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) \right) - r \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right)^2 + r \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) \right)}{e^{(2\Lambda(r))}}, 0 \right]$$

$$\left[0, 0, 0, -r \left(\left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) - \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) \cos(\theta)^2 - \left(\frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) + \left(\frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) \cos(\theta) + r \left(\frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) \right) - r \left(\frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) \right) \cos(\theta)^2 + r \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right)^2 - r \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right)^2 \cos(\theta)^2 - r \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) \left(\frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) + r \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) \left(\frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) \cos(\theta)^2 \right] / e^{(2\Lambda(r))}$$

Die erste Einstein Gleichung für (0,0) - Komponenten ist:

```
> estn_hlp1:=8*Pi*Energy_momentum[1,1] + Einstein[1,1]:
estn_hlp2:=expand(estn_hlp1/exp(Phi(r))^2):
eq1 := simplify(estn_hlp2) = 0;
```

$$eq1 := \frac{8 \pi \rho(r) r^2 - 2 e^{(-2\Lambda(r))} \left(\frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) r - 1 + e^{(-2\Lambda(r))}}{r^2} = 0$$

Und kann umgeschrieben werden in:

```
> eq1 := -8*Pi*rho(r)*r^2+Diff(r*(1-exp(-2*Lambda(r))),r)
= 0;
```

$$eq1 := -8 \pi \rho(r) r^2 + \left(\frac{d}{dr} (r (1 - e^{(-2\Lambda(r))})) \right) = 0$$

Die formale Substitution mit dem Exponentialansatz ergibt:

```
> eq1_n := subs( r*(1-exp(-2*Lambda(r))) = 2*m(r),lhs
(eq1)) = 0;
```

$$eq1_n := -8 \pi \rho(r) r^2 + \left(\frac{d}{dr} (2 m(r)) \right) = 0$$

> loes:=dsolve(eq1_n,m(r));

$$loes := m(r) = \int 4 \pi \rho(r) r^2 dr + _CI$$

$m(r)$ ist die Masse innerhalb der Sphärengränze mit Radius r . Damit die Integrationskonstante $_CI$ gelöst werden kann müssen wir Λ aus m ermitteln:

> hlp_1:=r*(1-exp(-2*Lambda(r))) = 2*m(r):

exp_lamb:=expand(solve(hlp_1, exp(-2*Lambda(r))));

$$exp_lamb := 1 - \frac{2 m(r)}{r}$$

Die Lorentz Metrik (siehe den Ausdruck für $g_{\mu, \nu}$ aus Λ) in Abwesenheit von Materie ist dann und nur dann möglich, wenn $_CI = 0$ ist. Die zweite Einstein Gleichung für (1,1)-Komponenten ist:

> eq2 := simplify(8*Pi*Energy_momentum[2,2] + Einstein [2,2]) = 0;

$$eq2 := \frac{8 \pi e^{(2 \Lambda(r))} p(r) r^2 - 2 r \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) + e^{(2 \Lambda(r))} - 1}{r^2} = 0$$

> eq2_2 := numer(lhs(simplify(subs(exp(2*Lambda(r)) = 1/(1-2*m(r)/r),eq2)))) = 0;

$$eq2_2 := -8 \pi r^3 p(r) + 2 r^2 \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) - 4 r \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) m(r) - 2 m(r) = 0$$

Damit erhalten wir:

> eq2_3 := Diff(Phi(r),r) = solve(eq2_2, diff(Phi(r),r));

$$eq2_3 := \frac{d}{dr} \Phi(r) = - \frac{4 \pi r^3 p(r) + m(r)}{r (-r + 2 m(r))}$$

Der Gradient des Gravitationspotentials Φ ist größer als in der Newton

Formulierung $\frac{\partial}{\partial r} \Phi = \frac{m}{r^2}$, damit wird hier der innere Druck als Ursache der Gravitation angenommen. (Alle Schleifen-Quanten Menschen bitte ich um Nachsicht

bei dieser Formulierung). Weiter geht es. Wir müssen jetzt die relativistische Gleichung der Hydrodynamik aufstellen. Das ist die eigentlich relevante Einstein Gleichung. u ist die 4-er Geschwindigkeit ... immer dran denken: x,y,z,ct , $Cf2$ ist die radiale Komponente der Euler Gleichung $u_r = u_{th} = u_{ph}=0$

```
> compts := array([u_t,u_r,u_th,u_ph]):
u := create([1], compts):
Cf2 := Christoffel2 ( ginv, Cf1 ):
eq3_hlp:=(rho(r)+p(r))*get_compts(cov_diff( u, coord, Cf2
))[1,2]/(u_t) = -diff(p(r),r);
eq3 := Diff(Phi(r),r) = solve(eq3_hlp, diff(Phi(r),r) );
```

$$eq3_hlp := (\rho(r) + p(r)) \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) = - \left(\frac{d}{dr} p(r) \right)$$

$$eq3 := \frac{d}{dr} \Phi(r) = - \frac{\frac{d}{dr} p(r)}{\rho(r) + p(r)}$$

Damit erhalten wir die bekannte Oppenheimer-Volkoff Gleichung des hydrodynamischen Druck-Gleichgewichts in Sternen. Diese spielt im Themenfeld der Sternentstehung und Sternentwicklung **DIE** entscheidende Rolle

```
> Diff(p(r),r) = factor( solve(rhs(eq3) = rhs(eq2_3),diff
(p(r),r) ) );
```

$$\frac{d}{dr} p(r) = \frac{(4 \pi r^3 p(r) + m(r)) (\rho(r) + p(r))}{r (-r + 2 m(r))}$$

Hier ist sichtbar, daß der Druckgradient größer als mit der klassischen Grenze $\left(\frac{\partial}{\partial r} p \right)$

$\frac{\rho m}{r^2}$) ist. Der Unterschied wird durch das Anwachsen des Drucks -Zählerterm- und Abnahme des Radius r -Nennerterm- bei Annäherung an den Stern beschrieben. Damit nimmt in diesem Ansatz die gravitation stärker zu als mit dem klassischen Newton Ansatz. Außerhalb des Sterns gilt: $m(r)=M, p=0$ wobei M die Masse des Sterns ist..

Dann folgt weiterhin:

```
> hlp_eq4:=diff(Phi(r),r) = subs({m(r)=M,p(r)=0},rhs(eq2_
3));
eq4 := dsolve(hlp_eq4, Phi(r));
```

$$hlp_eq4 := \frac{d}{dr} \Phi(r) = - \frac{M}{r (-r + 2 M)}$$

$$eq4 := \Phi(r) = -\frac{1}{2} \ln(r) + \frac{1}{2} \ln(r - 2M) + _CI$$

Als Randwertbedingung -was anders ist diese als 0 im größten Abstand!!!!???
schreiben wir:

```
> 0 = limit(rhs(eq4), r=infinity);
      0 = \_CI
```

Das setzen wir dann ein:

```
> Phi_r := subs(\_CI=0, eq4);
      Phi_r := \Phi(r) = -\frac{1}{2} \ln(r) + \frac{1}{2} \ln(r - 2M)
```

Damit ergibt sich die Schwarzschildmetrik außerhalb des Sterns zu:

```
> g_matrix := get_compts(g);
      g_matrix := \begin{bmatrix} -e^{(2\Phi(r))} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(2\Lambda(r))} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}
```

```
> g_matrix := matrix([[-exp(2*Phi(r)), 0, 0, 0], [0, exp(2*Lambda(r)), 0, 0], [0, 0, r^2, 0], [0, 0, 0, r^2*sin(theta)^2]]);
```

```
      g_matrix := \begin{bmatrix} -e^{(2\Phi(r))} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(2\Lambda(r))} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}
```

sch_comp	metrische Schwarzschild Komponenten
sch_compts[1,1]	zugehörige Koeffizienten von dt ² im Intervall
sch_compts[2,2]	zugehörige Koeffizienten von dr ² im Intervall
sch_compts[3,3]	zugehörige Koeffizienten von dtheta ² im Intervall
sch_compts[4,4]	zugehörige Koeffizienten von dphi ² im Intervall
sch	Schwarzschild Metrik

```
> coord := [t, r, theta, phi]:
```

```

sch_compts := array(symmetric,sparse,1..4,1..4):
sch_compts[1,1] := expand( subs(Phi(r)=-1/2*ln(r)+1/2*ln
(r-2*M),g_matrix[1,1]) ):
sch_compts[2,2] := expand( subs(Lambda(r)=-ln(1-2
*M/r)/2,g_matrix[2,2]) ):
sch_compts[3,3]:=g_matrix[3,3]:
sch_compts[4,4]:=g_matrix[4,4]:
sch := create([-1,-1], eval(sch_compts));

```

$$sch := table([compts = \begin{bmatrix} -1 + \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}, index_char = [-1, -$$

$\rho = \rho_0 = \text{const}$ (etwas später wird folgende Näherung verwendet $p = (\gamma - 1) \rho$, worin $\gamma = 1$ kann als Staub betitelt werden, 4/3 Anteil nichtkohärenter Abstrahlung, 2 feste Materie, kann als Stein oder Fels betitelt werden. Dann wird diese Masse beschrieben: M beschreibt die Gesamtmasse.

```

> m(r) = int(4*Pi*rho0*r^2,r);
M      = subs(r=R,rhs(%));

```

$$m(r) = \frac{4 \pi \rho_0 r^3}{3}$$

$$M = \frac{4 \pi \rho_0 R^3}{3}$$

Der Druck bestimmt sich zu:: Das ist die Oppenheim-Volkoff Gleichung

```

> hlp_eq5:=diff(p(r),r) = subs( {rho(r)=rho0,m(r)=4/3
*Pi*rho0*r^3},\
-(4*Pi*r^3*p(r)+m(r))*(rho(r)+p(r))/(r*(r-2*m(r))) );
eq5 := dsolve(hlp_eq5,p(r));

```

$$hlp_eq5 := \frac{d}{dr} p(r) = - \frac{\left(4 \pi r^3 p(r) + \frac{4 \pi \rho_0 r^3}{3}\right) (\rho_0 + p(r))}{r \left(r - \frac{8}{3} \pi \rho_0 r^3\right)}$$

$$eq5 := p(r) = \frac{(-6 + 2 \sqrt{-3 e^{(16_C1 \pi \rho_0)} + 8 \pi \rho_0 r^2 e^{(16_C1 \pi \rho_0)}}) \rho_0}{-9 - 3 e^{(16_C1 \pi \rho_0)} + 8 \pi \rho_0 r^2 e^{(16_C1 \pi \rho_0)}} - \rho_0,$$

$$p(r) = \frac{(-6 - 2 \sqrt{-3 e^{(16_C1 \pi \rho_0)} + 8 \pi \rho_0 r^2 e^{(16_C1 \pi \rho_0)}}) \rho_0}{-9 - 3 e^{(16_C1 \pi \rho_0)} + 8 \pi \rho_0 r^2 e^{(16_C1 \pi \rho_0)}} - \rho_0$$

Achtung beim Substituieren: Prozedur muß so laufen: den zu substituierenden Begriff "in die Maus" nehmen "ctrl c" und dann: subs (ctrl v = ...) dann tuts!!!
Der Exponentialausdruck hinter dem Komma im Lösungsmechanismus beschreibt die Randwertbedingung.

```
> hlp_1:=solve(simplify(subs(r=R,rhs(eq5[1])))=0,exp(16*_C1*Pi*rho0)); hlp_2:=solve(simplify(subs(r=R,rhs(eq5[2])))=0,exp(16*_C1*Pi*rho0));
```

$$hlp_1 := \frac{3 + 2 \sqrt{(e^{(-C1 \pi \rho_0)})^{16} (-3 + 8 \pi \rho_0 R^2)}}{-3 + 8 \pi \rho_0 R^2}$$

$$hlp_2 := -\frac{-3 + 2 \sqrt{(e^{(-C1 \pi \rho_0)})^{16} (-3 + 8 \pi \rho_0 R^2)}}{-3 + 8 \pi \rho_0 R^2}$$

```
> loes_1 := simplify(subs(exp(16*_C1*Pi*rho0) = -3+8*Pi*rho0*R^2,rhs(eq5[1])));
```

```
loes_2 := simplify(subs(exp(16*_C1*Pi*rho0) = -3+8*Pi*rho0*R^2,rhs(eq5[2])));
```

$$loes_1 := -(3 - \sqrt{9 - 24 \pi \rho_0 R^2 - 24 \pi \rho_0 r^2 + 64 \pi^2 \rho_0^2 r^2 R^2 - 12 \pi \rho_0 R^2 - 12 \pi \rho_0 r^2 + 32 \pi^2 \rho_0^2 r^2 R^2}) / (4 \pi (-3 R^2 - 3 r^2 + 8 \pi \rho_0 r^2 R^2))$$

$$loes_2 := -(3 + \sqrt{9 - 24 \pi \rho_0 R^2 - 24 \pi \rho_0 r^2 + 64 \pi^2 \rho_0^2 r^2 R^2 - 12 \pi \rho_0 R^2 - 12 \pi \rho_0 r^2 + 32 \pi^2 \rho_0^2 r^2 R^2}) / (4 \pi (-3 R^2 - 3 r^2 + 8 \pi \rho_0 r^2 R^2))$$

In der Sternenmitte (Zentrum) haben wir:

```
> druck_1:=simplify(subs(r=0,loes_1)); druck_2:=simplify(subs(r=0,loes_2));
```

$$druck_1 := -\frac{-3 + \sqrt{9 - 24 \pi \rho_0 R^2 + 12 \pi \rho_0 R^2}}{12 \pi R^2}$$

$$druck_2 := -\frac{-3 - \sqrt{9 - 24 \pi \rho_0 R^2 + 12 \pi \rho_0 R^2}}{12 \pi R^2}$$

Der Druck ist im Abstand R_{crit} unendlich hoch:

```
> R_crit1 = simplify(solve(expand(denom(druck_1))=0,R)
[1],radical,symbolic);
R_crit2 = simplify(solve(expand(denom(druck_2))=0,R)
[2],radical,symbolic);
```

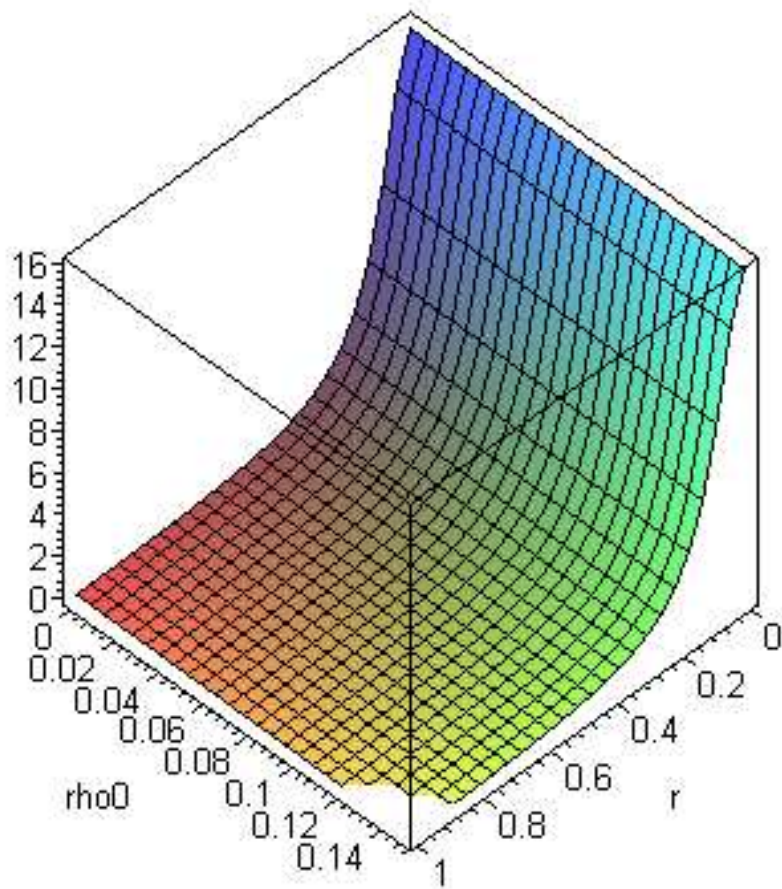
$$R_{crit1} = 0$$

$$R_{crit2} = 0$$

Nur positive Lösungen machen Sinn...was ist denn auch ein negativer Druck? Im Vakuum ist der Druck 0. ρ_0 ist die inkompressible Masse. Ich lasse mal den Parameter ρ_0 bis 0.15 laufen. Damit wird verdeutlicht, daß sich bereits im Abstand 1 keine Änderung ergibt. Abstand 1 bedeutet: Sternrand Das zweite Bild zeigt das Verhalten bis zum doppelten Abstand, heißt: Bis zum Abstand von einem Sternradius bezogen auf Sternoberfläche.

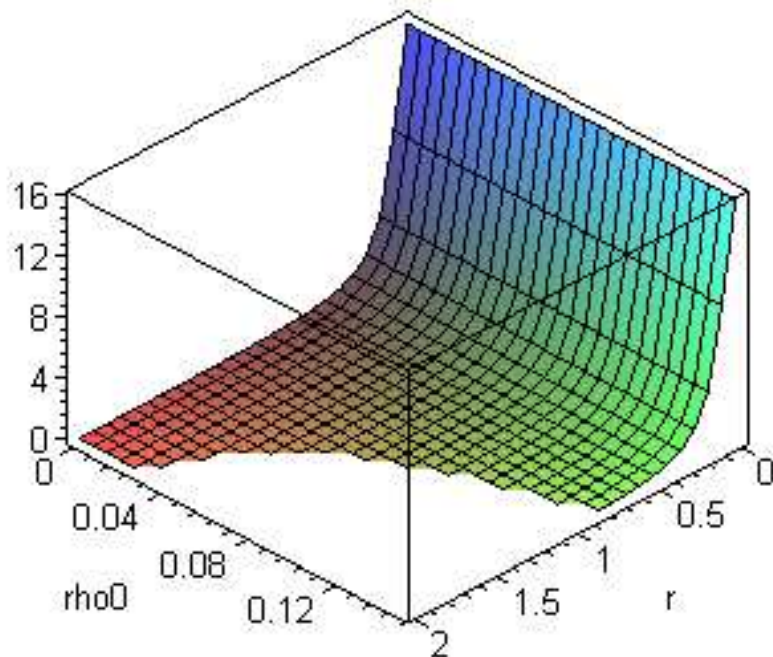
```
> plot3d({subs(R=1e-1,loes_2) },r=0..1,rho0=
0..0.15,axes=boxed,title=`Druck vergrößert sich
exponentiell bei Abnahme des Radius`);
```

Druck vergrößert sich exponentiell bei Abnahme des Radius



```
> plot3d({subs(R=1e-1,loes_2) },r=0..2,rho0=
0..0.15,axes=boxed,title=`Druck vergrößert sich
exponentiell bei Abnahme des Radius`);
```

Druck vergrößert sich exponentiell bei Abnahme des Radius



Um die Raumzeit Geometrie vorstellbar zu machen nehmen wir eine Äquator Sektion des Sterns von ($\theta = \pi/2$) und frieren die zeit mal in einen 3-dimensionalen Raum ein. Diese Prozedur ist unter dem Namen "embedding" bekannt. Ausgehend vom Metrik Tensor, das 2-dimensionale Linienelement ist:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\phi^2$$

und für den Euklid'schen 3 dimensionalen Raum:

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2$$

Wir führen mal eine 2 dimensionale Oberfläche ein:

$$z=z(r). \text{ As } dz = \frac{dz}{dr} dr$$

und erhalten damit der Euklid Linien- Element:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2$$

schw_met: Schwarzschild metrik

eq_fl_em Gleichsetzung flacher und eingebetterter Raum

embedd eingebetteter Raum

```
> schw_met:=subs(theta=Pi/2,get_compts(sch));
eq_fl_em:=dr^2*schw_met[2,2] + dphi^2*%[3,3] = (1+diff
(z(r),r)^2)*dr^2 + r^2*dphi^2;
embedd_diff:=diff(z(r),r) = solve(%,diff(z(r),r))[1];
```

`embedd_erg:=dsolve(embedd_diff,z(r));`

$$schw_met := \begin{bmatrix} -1 + \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$eq_fl_em := \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\phi^2 = \left(1 + \left(\frac{d}{dr} z(r)\right)^2\right) dr^2 + r^2 d\phi^2$$

$$embedd_diff := \frac{d}{dr} z(r) = \frac{\sqrt{2} \sqrt{(r-2M)M}}{r-2M}$$

$$embedd_erg := z(r) = 2\sqrt{2rM - 4M^2} + _C1$$

Wir nehmen die vorletzte Gleichung und drücken M durch $\rho_0 = \text{const}$: aus
 rho_loes Dichte der Gesamtmasse
 space_inside Raum innen
 space_outside Raum außen

`> rho_loes := solve(M = 4/3*Pi*rho0*R^3,rho0);`
`space_inside:= Int(1/sqrt(r/((4/3)*Pi*rho0*r^3)-1),r);`
`space_outside:= Int(1/sqrt(r/((4/3)*Pi*rho0)-1),r);`

$$rho_loes := \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$space_inside := \int \frac{2}{\sqrt{\frac{3}{r^2 \pi \rho_0} - 4}} dr$$

$$space_outside := \int \frac{2}{\sqrt{\frac{3r}{\pi \rho_0} - 4}} dr$$

```
> inside:=value(subs(rho0=rho_loes,space_inside));
outside:= value(subs(rho0=rho_loes,space_outside));
```

$$inside := - \frac{\sqrt{4 (R^3 - r^2 M)}}{2 \sqrt{\frac{R^3 - r^2 M}{r^2 M} r M}}$$

$$outside := \frac{\sqrt{\frac{4 r R^3}{M} - 4 M}}{R^3}$$

Das Ergebnis dieser "Einbettung" für die äquatoriale und vertikale Zone wird unten gezeigt. Der "Newton Fall" entspricht der horizontalen Oberfläche mit ihrer Asymptote $r \rightarrow \infty$. Der außenliegende Raum liegt außerhalb eines Rings, der die "Begrenzung" des Sterns darstellt

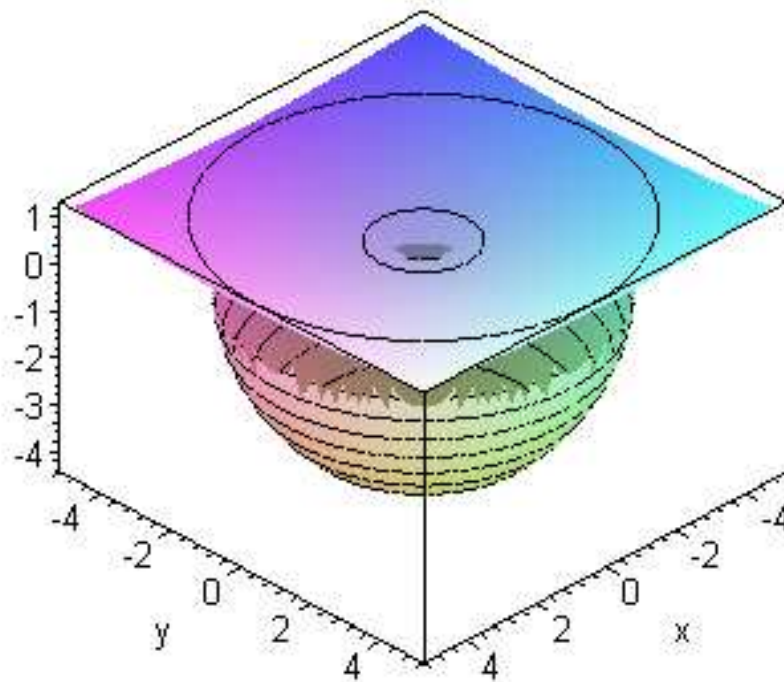
fig1: Das Sternes Innere (r in Einheit von M) ... nicht verwirren lassen, ist nur eine Normierung

fig2: Das Sternes Äußere

```
> fig1 := plot3d(subs(M=1,subs(R=2.66*M,subs(r=sqrt(x^2+y^2),inside))),x=-5..5,y=-5..5,grid=[100,100],style=PATCHCONTOUR):
```

```
fig2 := plot3d(subs(M=1,subs(R=2.66*M,subs(r=sqrt(x^2+y^2),outside))),x=-5..5,y=-5..5,style=PATCHCONTOUR):
```

```
display(fig1,fig2,axes=boxed);
```



Erläuterung des Schwarzen Lochs

Damit wurde gezeigt, daß die Änderung der Radialkomponente dr gegenüber der Änderung des Intervalls dl , welches die Länge des Kurvensegments darstellt in der Umgebung des Sterns kleiner ist im Vergleich zum Newton Fall (Ebene $z=0$ und dort ist auch $dr = dl$).

$$dl = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}$$

Der Stern verändert den Raum so daß ein Beobachter sich vom Stern fortbewegt, jedoch die Radial Koordinate langsam anwächst. Damit ergibt sich so etwas wie eine Art Loch in der unmittelbaren Umgebung dieser Oberfläche, welche oben als "Außen" benannt wurde. Was passiert eigentlich, wenn dieser Stern gerade einen Radius besitzt, welcher exakt in diese Grenze $R = 2M$ hineinfällt? Solch ein Objekt wird "Schwarzes Loch" genannt

Ein Probekörper bewegt sich in der Nähe des Schwarzschildradius. Diese Bewegung sei relativistisch gesehen gering:

$$g^{(\alpha, \beta)} p_\alpha p_\beta + \mu^2 = 0 \quad (p \text{ ist das 4-Moment, } \mu \text{ ist die Ruhemasse}).$$

Dort, wo L mit dem Winkelmoment λ (affiner (umkehrbarer) Parameter) korrespondiert wird, beschreibt der zweite Term die Radial Geschwindigkeit.

hlp_1. $\tau = \lambda * \mu$ $E = E/\mu$ $L = L/\mu$
 eq6 beschreibt das Bewegungs Integral (Lösung der DGL)
 V wird effektives Potential genannt

$$> \text{eq6_hlp} := -E^2 / (1 - 2M/r(\tau)) + \text{diff}(r(\tau), \tau)^2 / (1 - 2$$

```

*M/r(tau)) + L^2/r(tau)^2+1 = 0;
eq6 := diff(r(tau),tau)^2 = expand(solve(eq6_hlp,diff(r
(tau),tau)^2));
V := sqrt(-factor(op(2,rhs(eq6)) + op(3,rhs(eq6)) + op
(4,rhs(eq6)) + op(5,rhs(eq6))));

```

$$eq6_hlp := -\frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r(\tau)}} + \frac{\left(\frac{d}{d\tau}r(\tau)\right)^2}{1 - \frac{2M}{r(\tau)}} + \frac{L^2}{r(\tau)^2} + 1 = 0$$

$$eq6 := \left(\frac{d}{d\tau}r(\tau)\right)^2 = E^2 + \frac{2M}{r(\tau)} - \frac{L^2}{r(\tau)^2} + \frac{2L^2M}{r(\tau)^3} - 1$$

$$V := \sqrt{-\frac{(L^2 + r(\tau)^2)(-r(\tau) + 2M)}{r(\tau)^3}}$$

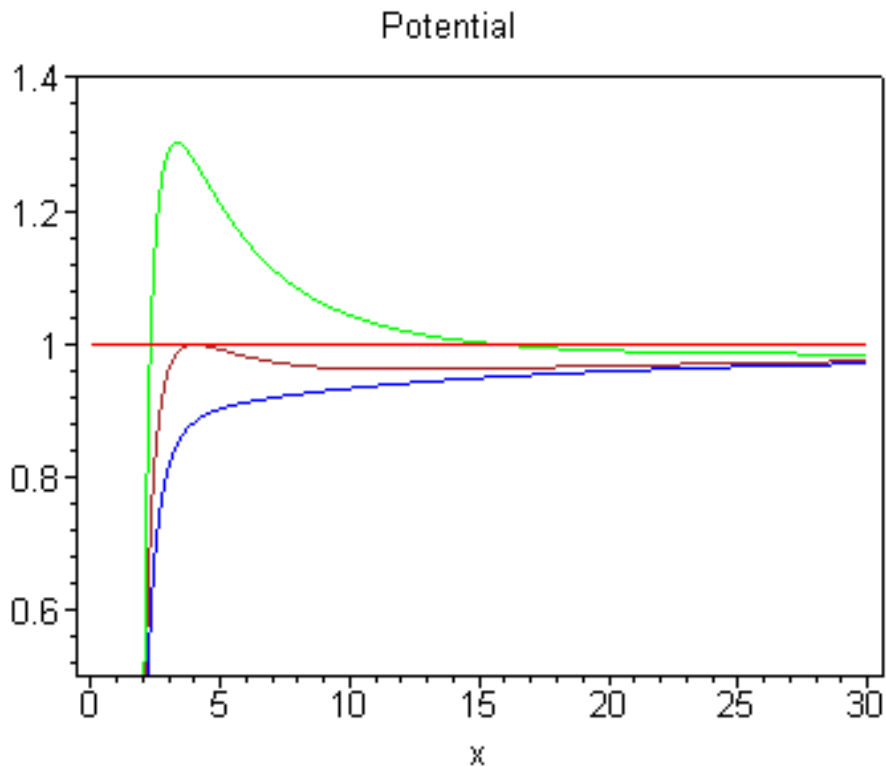
Das effektive Potential zeigt die Orbitalbewegung, Es beschreibt die Änderung des Winkelmoments L bezüglich des Abstands r. Der Level E=1 gehört zu einem Partikel das Anfangs bewegungslos ist.

```

> hlp:=subs({M=1,r(tau)=x,L=y},V);
plot({subs(y=3,hlp),subs(y=4,hlp),subs(y=6,hlp),1},x=
0..30,axes=boxed,color=
[red,green,blue,brown],title=`Potential`,view=0.5..1.4);

```

$$hlp := \sqrt{-\frac{(y^2 + x^2)(-x + 2)}{x^3}}$$



Im ersten Teil haben wir die Bewegung im relativistischen Potential betrachtet. Jedoch haben wir uns beschränkt auf eine lineare Näherung. Das ist gleichbedeutend mit einem schwachen Feld. Wir haben also lediglich schwache Gravitationsfelder diskutiert. Aus diesen Betrachtungen heraus ergaben sich auch die Perihel Drehung sowie die Lichtablenkung unter Masseneinfluß.

Diese lineare Einschränkung haben wir teilweise überwunden und haben unter die relativistische Bewegung unter dem Potentialbegriff kennengelernt. Wenn gilt:

$V_{max} > E > 1$ dann geht die Bewegungsgröße gegen unendlich. Damit sind wir mit dem hyperbolischen Newton Ansatz gleich. Wenn E im Potential Topf (Loch) liegt, oder $E = V$, dann haben wir eine begrenzte Bewegungsgröße. Die Bewegungsgröße verbunden mit dem Energiebegriff, die gleich der Extremwerte des Potentials ist, beschreibt dann die Kreisbewegung. Diese stabile Bewegungsgröße (Zentrifugalkraft = Zentripetalkraft) bestimmt sich durch das Energieminimum, wird aber instabil bei Energiemaximum. Die Existenz dieser Extremata wird durch folgende Beziehungen verdeutlicht:

move_zeroes Nullstellen der Ableitung des Potentials

```
> move_zeroes := numer( simplify( diff( subs(r(tau)=r,V), r) ) )=0;
```

```
> zeroes_erg := solve(move_zeroes, r);
```

$$move_zeroes := r^2 M - r L^2 + 3 L^2 M = 0$$

$$zeroes_erg := \frac{(L + \sqrt{L^2 - 12 M^2}) L}{2 M}, \frac{(L - \sqrt{L^2 - 12 M^2}) L}{2 M}$$

Die Konsequenz daraus ist:

Die Kreisbewegung ist möglich, wenn: $L > 2M\sqrt{3}$. Das gilt, wenn: $r > 3(2M)$. Der minimal Abstand, ab dem die Kreisbewegung instabil wird ist:

```
> instable:=limit(1/2*(L-sqrt(L^2-12*M^2))*L/M,
L=infinity);
```

$instable := 3 M$

Fehlen Extremata (siehe rote Kurve im obigen Plot) oder der Übergang durch $r < 3M$ endet in einer Fallbewegung (auf den Stern zu), das ist ähnlich, als würde gelten:

$E > V_{max}$. Dies wird auch **Gravitationsfalle** genannt. Auch hier gibt es ein Newton Analogon: das der Punktmasse! Die begrenzte Bewegung für den Fall eines lokalen Minimums (blaue Kurve des obigen Plots) ist das Analogon zu Newton aber besitzt keinen elliptischen Charakter. Ich möchte inen besonderen Fall für $L=0$ zeigen. Die wirkliche Zeit eines fallenden Probekörpers ist: Radius für "Nullgeschwindigkeit: $R=2*M/(1-E^2)$

τ_{erg} ist das konvergente Integral für $r \rightarrow 2M$

```
> tau_1:= Int( 1/sqrt(subs({L=0,r(tau)=r},rhs(eq6))),r);
> tau:= Int(1/(sqrt(2*M/r-2*M/R)),r);
> tau_simp:=limit( value( tau ),r=2*M );
> tau_erg:=simplify(tau_simp);
```

$$\tau_{1} := \int \frac{1}{\sqrt{E^2 + \frac{2M}{r} - 1}} dr$$

$$\tau := \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}} dr$$

$$\tau_{simp} := \frac{1}{4} \frac{-2 \sqrt{\frac{R-2M}{R}} \sqrt{2R} \sqrt{2MR-4M^2} - \sqrt{\frac{R-2M}{R}} \sqrt{2} R^2 \arctan\left(\frac{-}{2}\right)}{\sqrt{MR-2M^2}}$$

$$\tau_{erg} := \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\frac{R-2M}{R}} R \left(4 \sqrt{M(R-2M)} + \sqrt{2} R \arctan\left(\frac{(-4M+R)\sqrt{2}}{4\sqrt{M(R-2M)}}\right) \right)}{\sqrt{M(R-2M)}}$$

Ein von außen schauender Beobachter "sieht"

$$\frac{\partial}{\partial \tau} r = \frac{\partial}{\partial t} r \quad \frac{\partial}{\partial \tau} t = \frac{\partial}{\partial t} r \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}} = E \frac{\partial}{\partial t} r_o$$

r_o ist die Zeitkoordinate des sich im unendlichen befindenden Beobachters...Ob der noch was sieht von so weit weg?

r_{erg} ist das divergente Integral für $r \rightarrow 2M$

`> r[o] := Int(1/(1-2*M/r),r) = int(1/(1-2*M/r),r);
r_erg:=limit(value(rhs(%)),r=2*M);`

$$r_o := \int \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr = r + 2M \ln(r - 2M)$$

$$r_{erg} := -\text{signum}(M) \infty$$

Diese Gleichungen werden weiter benützt.

Entartete Sterne und ihr Gravitationskollaps

Die gerade erhaltene Ausdrücke für die Zeit des radialen Falls zeigen eine Besonderheit, wenn der Radius des Sterns kleiner oder gleich $2M \left(\frac{2GM}{c^2} \right)$ ist.

Diese Grenze wird auch Gravitationsradius R_g genannt. Die endliche wirkliche Zeit τ des Falls ist in Übereinstimmung oder korrespondiert mit der endlichen "äußeren" Zeit r_o

wenn $r \rightarrow 2M$ strebt. Das sieht für den weit entfernten Beobachter so aus, als würde dieser Fall niemals enden. Oder ander gesagt: die relativistische Zeit wird langsamer. Als Konsequenz dieses Phänomens sieht man die äußerst starke rot Verschiebung eines "fallenden oder angesaugten" Photons. Das begründet sich in der Schwarzschild Metrik und wird über folgende Frequenz Beziehung beschrieben:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\Delta \tau_2}{\Delta \tau_1} = \sqrt{\frac{g_{0,0}(r_2)}{g_{0,0}(r_1)}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_2}}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_1}}}$$

$\Delta \tau$ ist das wirkliche Zeitintervall zwischen zwei Lichtblitzen an verschiedenen radialen Punkten. Gleichzeitig ist die Fluchtgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Dies ist

diejenige Geschwindigkeit ab der das Licht aus der Sphäre mit Radius $R = R_g$ entweichen kann. Damit können wir keinerlei Informationen aus dem schwarzen Loch selber erhalten. Es bleibt bei mathematischen bzw interpretativen Erklärungsversuchen. Ist doch dürftig oder nicht? Aber da läßt sich eben nichts machen. Wir haben die Hoffnung auf indirekten Wege mehr aus dem Inneren dieser schwarzen Lochhülle zu erhalten...??? Wie jedoch kann ein Objekt mit einem Radius kleiner als R_g auftreten? Wir fangen mal vorsichtig mit dem Druck des freien Radialzusammenbruchs (das ist der Winkelteil bei dem die Metrik 0 ist) der Staub Sphäre der Masse M an..

$d(s)^2$ beschreibt die Schwarzschild Metrik
 τ die wirkliche Zeit, welche für einen Beobachter am Grund der Sphäre vergeht.
 pot_1 Potential

```
> r := 'r':
E := 'E':
hlp_1:=subs( r=r(t),get_compts(sch) ):
d(s)^2 = hlp_1[1,1]*d(t)^2 + hlp_1[2,2]*d(r)^2;
-d(tau)^2 = collect(subs( d(r)=diff(r(t),t)*d(t),rhs(%)
),d(t));
%/d(tau)^2;
subs({d(t)=E/(1-2*M/r(t)),d(tau)=1},%); es wurde verwendet: d
(t)/d(tau) = E/(1-2*M/r)
pot_1 := factor( solve(%, (diff(r(t),t))^2) );
```

$$d(s)^2 = \left(-1 + \frac{2M}{r(t)} \right) d(t)^2 + \frac{d(r)^2}{1 - \frac{2M}{r(t)}}$$

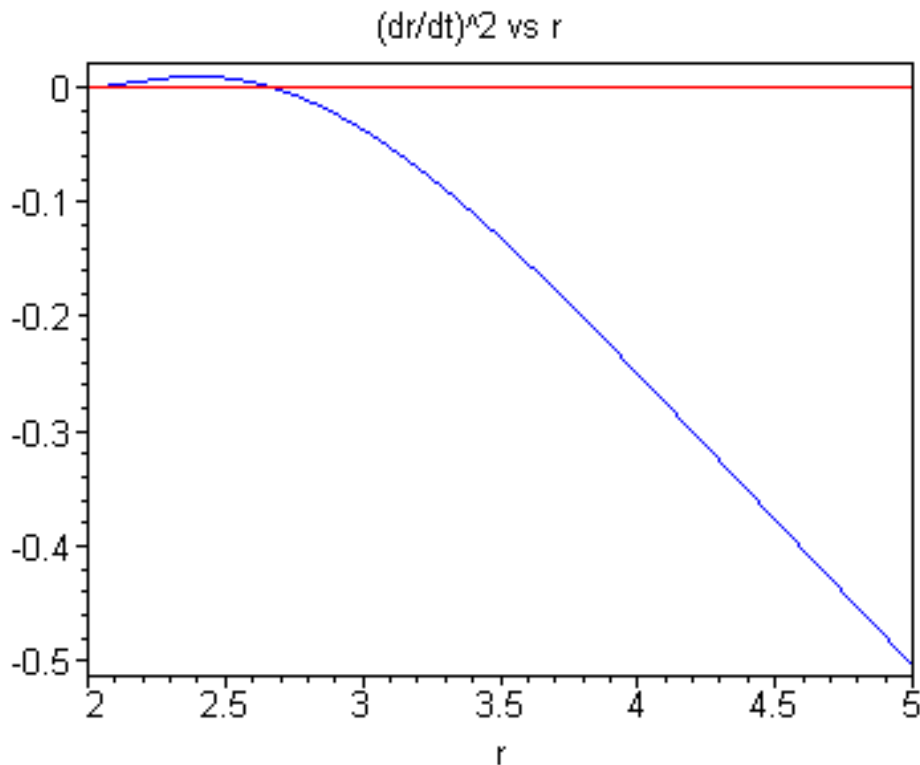
$$-d \left(\int \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}} dr \right)^2 = \left(-1 + \frac{2M}{r(t)} + \frac{\left(\frac{d}{dt} r(t) \right)^2}{1 - \frac{2M}{r(t)}} \right) d(t)^2$$

$$-1 = \frac{\left(-1 + \frac{2M}{r(t)} + \frac{\left(\frac{d}{dt} r(t) \right)^2}{1 - \frac{2M}{r(t)}} \right) d(t)^2}{\left(\int \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}} dr \right)^2}$$

$$-1 = \frac{\left(-1 + \frac{2M}{r(t)} + \frac{\left(\frac{d}{dt} r(t) \right)^2}{1 - \frac{2M}{r(t)}} \right) E^2}{\left(1 - \frac{2M}{r(t)} \right)^2}$$

$$pot_1 := \frac{(-r(t) + 2M)^2 (2M - r(t) + E^2 r(t))}{E^2 r(t)^3}$$

```
> plot({subs({E=0.5,M=1,r(t)=r},pot_1),0*r},r=
2..5,axes=boxed,color=[red,blue],title=`(dr/dt)^2 vs r`);
```

Der beschriebene Kollaps ist die Bewegung ausgehend vom rechten Punkt der "Null"

Geschwindigkeit $\frac{\partial}{\partial t} r$ -das ist diejenige Geschwindigkeit welche für den entfernten Beobachter gilt- hin zum linken Punkt der Null Geschwindigkeit. Im oberen Graph sind diese als Nullstellen schön zu sehen. Die linke Nullstelle ist gleichzeitig ein relatives Minimum. Diese Punkte sind:

```
> zero_v:=solve(subs(r(t)=r,pot_1)=0,r);
              zero_v := 2 M, 2 M, -  $\frac{2 M}{-1 + E^2}$ 
```

Es gilt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} r\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \left(\frac{2M}{r} - 1 + E^2\right)}{E^2} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \left(\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}\right)}{1 - \frac{2M}{R}} = \left(1 - \frac{R_g}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{1 - \frac{R_g}{r}}{1 - \frac{R_g}{R}}\right)$$

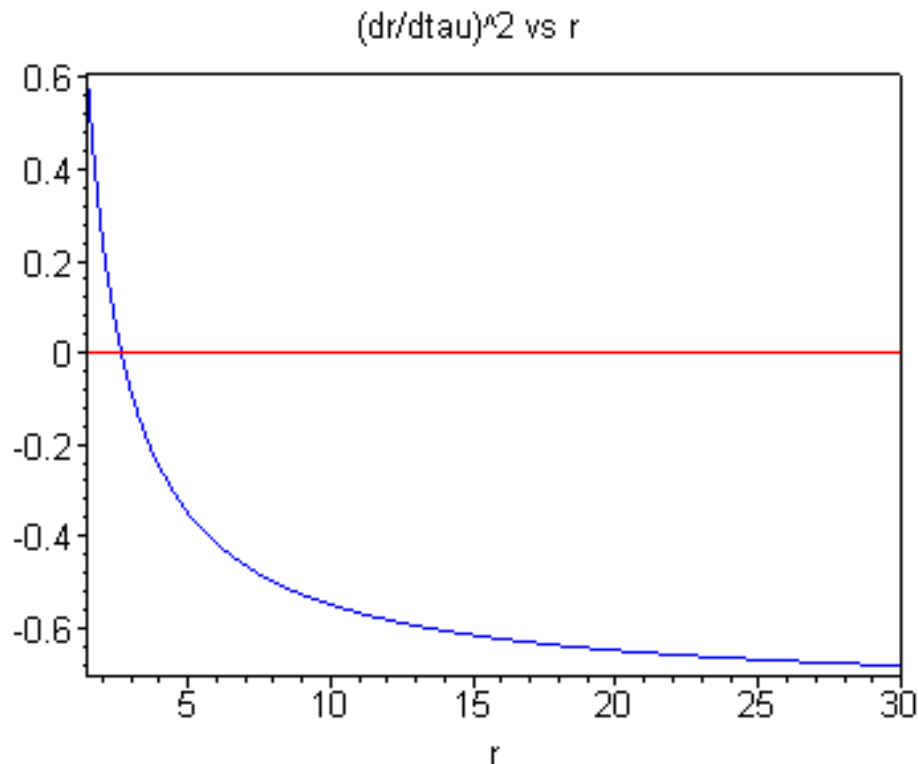
Der verlangsamende Kollaps für den entfernten Beobachter in der Umgebung von R_g wird durch die Zeitdilatation verursacht. Trotzdem hat der Beobachter im Kollaps

selber die wahre Geschwindigkeit $\frac{\partial}{\partial \tau} r$: $d/d(t)=(d/d(\tau))*(1-2*M/r)/E$

```
> pot_2 := simplify(pot_1*(E/(1-2*M/r(t)))^2);
```

$$pot_2 := \frac{2M - r(t) + E^2 r(t)}{r(t)}$$

```
> plot({subs({E=0.5,M=1,r(t)=r},pot_2),0*r},r=
1.5..30,axes=boxed,color=[red,blue],title='(dr/dtau)^2 vs
r');
```



Die kollabierte Oberfläche kreuzt den Gravitationsradius bei einem endlichen Zeitmoment. Es ist:

$\lim_{r \rightarrow R_g} \frac{\partial}{\partial t} r = 1$ das ist die Lichtgeschwindigkeit, im Falle $E = 1$, was wiederum $R = \infty$ entspricht.

Die Zeit oder Uhr des sich im Kollaps befindlichen Beobachters verläuft:

```
> hlp:=Int(1/sqrt(R/r-1),r)/sqrt(1-E^2);
simplify(value(hlp),radical,symbolic);
```

$$hlp := \frac{1}{\sqrt{1-E^2}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{R}{r}-1}} dr$$

$$\frac{1}{2} \frac{2\sqrt{(R-r)r} + R \arctan\left(\frac{R-2r}{2\sqrt{(R-r)r}}\right)}{\sqrt{1-E^2}}$$

Es ist für den etwas erfahreneren Physiker klar, daß obiges Integral gleichzusetzen ist wie hier gezeigt:

$$\frac{1}{\sqrt{1-E^2}} \int_r^R \frac{1}{\sqrt{\frac{R}{r}-1}} dr = \frac{\pi R}{\sqrt{1-E^2}} = \frac{\pi M}{(1-E^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

Nun ist es ja hinreichend bekannt, daß Sterne durch ihre atomaren Prozesse leben. Jedoch wenn dieser Prozess beendet ist, wird der vom atomaren Prozess stammende innere Druck dem oben gezeigten äußeren Druck nachgeben: der Stern beginnt zu implodieren. Der Fall der äußeren Staubhülle auf die Sternoberfläche kann nur aufgehhalten werden durch baryonischen Druck oder durch Druck der Elektronen. Der Gleichgewichtszustand wird bestimmt durch das Minimum der Gravitationsenergie $\frac{-GM^2}{R}$

und die thermisch bedingten kinetischen Energie des Zerfalls. Nehmen wir einen Wasserstoffball an. Sinkt die Temperatur auf den Nullpunkt, heißt das nicht gleichzeitig, daß die kinetische Energie der Elektronen auch Null ist! Da steht die Quantenphysik noch dazwischen! Ein Elektron besitzt ein "Zellvolumen" proportional λ^3 , wobei $\lambda = \frac{h}{2\pi p_e}$ die Compton Wellenlänge ist. p_e ist das Elektron Moment. Für nicht relativistische Elektronen gilt:

- E[e] kinetische Energie des Elektrons
- E[k] gesamte kinetische Energie, n[e] ist die Anzahl der Elektronen
- m[p] Masse des Protons, Annahme: m[e] >> m[p]
- E[g] Gravitations Energie
- E Gesamt Energie

```
> E[e] := p[e]^2/m[e];
E[k] := simplify( n[e]*R^3*subs( p[e]=h*n[e]^(1/3)/(2
*pi),E[e] ) );
E[k] := subs( n[e]=M/R^3/m[p],%);
E[g] := -G*M^2/R;
E := E[g] + E[k];
```

$$E_e := \frac{p_e^2}{m_e}$$

$$E_k := \frac{1}{4} \frac{n_e^{(5/3)} R^3 h^2}{\pi^2 m_e}$$

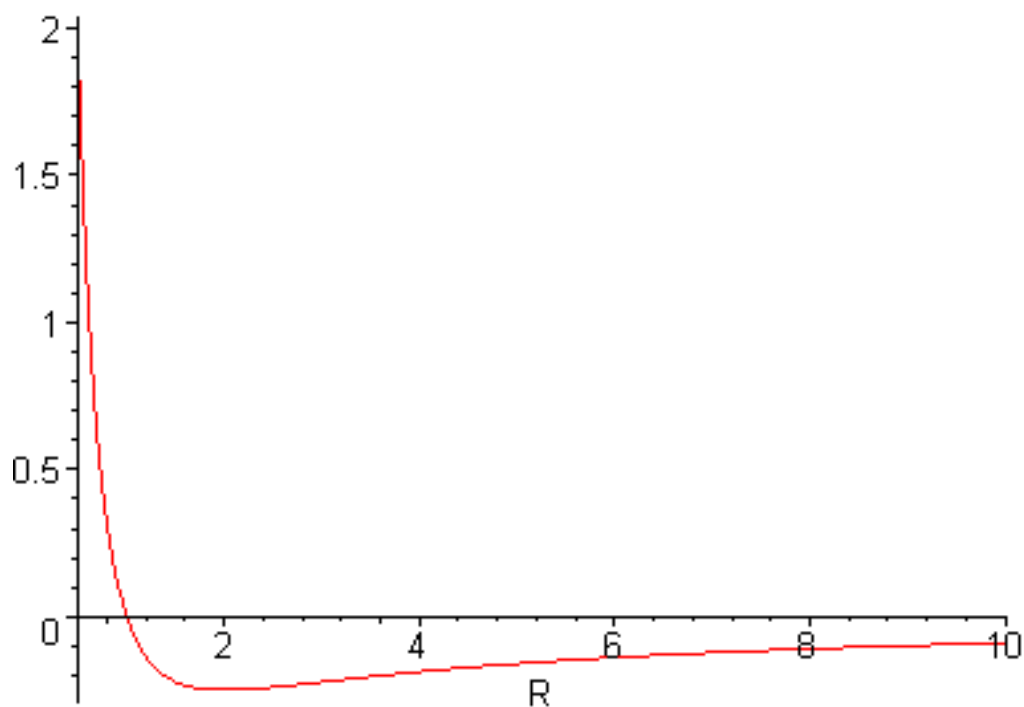
$$E_k := \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{M}{R^3 m_p}\right)^{(5/3)} R^3 h^2}{\pi^2 m_e}$$

$$E := -\frac{G M^2}{R} + \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{M}{R^3 m_p}\right)^{(5/3)} R^3 h^2}{\pi^2 m_e}$$

Berechnung der Energieabhängigkeit vom Abstand R

```
> pot := -1/R+1/R^2:
plot(pot,R=0.5..10, title=`Energie des zerfallenden
Sterns`);
```

Energie des zerfallenden Sterns



Es wird in diesem Plot verdeutlicht, daß die Energieabhängigkeit vom Radius ein Minimum hat. Damit zeigt sich auch deutlich daß es einen Gleichgewichtszustand geben muß. Sonst würde die Kurve stetig fallen!

Energieminimum in Abhängigkeit des Gleichgewichtszustands:

> **E_min:=solve(diff(E, R) = 0, R);**

$$E_{min} := \frac{1}{2} \frac{(M^2 m_p)^{(1/3)} h^2}{M m_p^2 \pi^2 m_e G} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{(M^2 m_p)^{(1/3)} h^2}{M m_p} + \frac{1}{2} I \sqrt{3} \frac{(M^2 m_p)^{(1/3)} h^2}{M m_p} \right)}{\pi^2 m_p m_e G},$$

$$\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{(M^2 m_p)^{(1/3)} h^2}{M m_p} - \frac{1}{2} I \sqrt{3} \frac{(M^2 m_p)^{(1/3)} h^2}{M m_p} \right)}{\pi^2 m_p m_e G}$$

Der Gleichgewichtszustand wird erreicht bei $R_{min} \sim \frac{h^2}{G M^{(1/3)} m_e m_p^{(5/3)}}$ und der Stern, welcher in diesem Gleichgewichtszustand noch eine Weile verharrt wird weiter zerfallen, wenn auch dieser den Gleichgewichtszustand erhaltende atomare Prozess erlischt. Der Stern wird sehr sicher als Weißer Zwerg enden. Der Wert seiner Dichte in diesem Zustand ist dann:

> **equilib_num_density:=simplify(subs(R[min]=h^2/(G*M^(1/3)*m[e]*m[p]^(5/3)),n[e]=M/R[min]^3/m[p]));**

$$equilib_num_density := n_e = \frac{M^2 G^3 m_e^3 m_p^4}{h^6}$$

Haben wir es mit einem massereicheren Stern zu tun, wird auch der Radius des Gleichgewichtszustands geringer werden. Das widerspricht dem einfachen Wassertropfen Modell! Im Zusammenhang mit dem Unschärfepinzipp wird das Moment des Elektrons größer werden:

$$p_e n_e^{(-1/3)} \sim h.$$

Die nichtrelativistische Annahme impliziert: $p_e \ll m_e c$

> **hlp:=simplify(rhs(%)^(1/3)*h) - c*m[e];**

> **solve(hlp=0,M);**

$$hlp := \left(\frac{M^2 G^3 m_e^3 m_p^4}{h^6} \right)^{(1/3)} h - c m_e$$

$$\frac{\sqrt{G c h h c}}{G^2 m_p^2}, - \frac{\sqrt{G c h h c}}{G^2 m_p^2}$$

Das letzte Ergebnis zeigt das nichtrelativistische Massenkriterium:

$$M \ll \frac{(h c)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{m_p^2 G^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

Damit überhaupt ein Kollaps zu einem weißen Zwerg führen kann, wird demnach hier gefordert:

Wir brauchen relativistische Partikel!!!

Dann schauen wir mal:

E[e] kinetische Energie E= pc für relativistische Partikel

E[k] gesamte kinetische Energie, n[e] ist die Anzahl der Partikel

m[p] Masse des Protons, Annahme: m[e] >> m[p]

E[g] Gravitations Energie

E Gesamt Energie zeigt die Abhängigkeit -a/R+b/R

E_hlp_num hier zeigt sich keine Abhängigkeit von R! Deshalb gibt es keine stabile Konfiguration mit einem Energieminimum

```
> E[e] := h*c*n[e]^(1/3);
E[k] := simplify( n[e]*R^3*E[e] );
E[k] := subs( n[e]=M/R^3/m[p],%);
E[g] := -G*M^2/R;
E := E[g] + E[k];
E_hlp:=simplify( diff(E, R), radical );
E_hlp_num:=numer(E_hlp);
Extremata:=solve(E_hlp_num =0, M );
```

$$E_e := h c n_e^{(1/3)}$$

$$E_k := n_e^{(4/3)} R^3 h c$$

$$E_k := \left(\frac{M}{R^3 m_p} \right)^{(4/3)} R^3 h c$$

$$E := -\frac{G M^2}{R} + \left(\frac{M}{R^3 m_p}\right)^{(4/3)} R^3 h c$$

$$E_{hlp_num} := -\left(-G M m_p + \left(\frac{M}{R^3 m_p}\right)^{(1/3)} h c R\right) M$$

$$Extremata := 0, \frac{\sqrt{G c h h c}}{G^2 m_p^2}, -\frac{\sqrt{G c h h c}}{G^2 m_p^2}$$

Wir erhielten die Beziehung für die kritische Masse $M_c \sim m_p^2 G^{\left(\frac{3}{2}\right)} (h c)^{\left(\frac{3}{2}\right)} = 1.4 M_{sun}$.
 Diese wird auch Chandrasekhar Grenze für Weiße Zwerge genannt. Geringere Massen führen zu Weißen Zwergen mit nicht-relativistischen Elektronen, während größere Massen einen Sternkollaps verursachen, der nicht durch den Druck entarteter Elektronen aufgefangen werden kann.

Solche massereichen Sterne kollabieren dann zum Neutronenstern.

Für diese Massen gilt etwa: $1.4 M_{sun} < M < 3 M_{sun}$.

Sterne noch größerer Massen kollabieren zu Schwarzen Löchern

Literatur:

- <http://de.wikipedia.org/wiki/Sternentstehung>
- <http://www.zum.de/Faecher/A/Sa/STERNE/st1.htm>
- http://de.wikipedia.org/wiki/Wei%C3%9Fer_Zwerg
- <http://german.therfcc.org/wei%C3%83%C5%B8er-zwerg-379360.html>
- <http://german.therfcc.org/wei%C3%83%C5%B8er-zwerg-379360.html>

Schwarzschild Schwarzes Loch

Kehren wir zurück zur Schwarzschild Metrik

> **get_compts(sch);**

$$\begin{bmatrix} -1 + \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Es gibt wohl 2 Singularitäten bei $r=2M$ und $r=0$. Die Frage nach dem Sinn der Ersten stellt sich. Wenn wir den Ereignishorizont $sh_{1,1}$ sowie $sh_{2,2}$ das heißt auch: $g_{0,0}$ und $g_{1,1}$ überqueren dann ändert sich das Vorzeichen.

Diese Vorzeichenänderung bedeutet: Der Raum und die Zeit tauschen sich aus!

Sollte ein Körper oder auch eine Information, ein Signal diesen Gravitationsradius überqueren, so gibt es kein entkommen! Der Fall in die Singularität ist nicht umkehrbar, ebensowenig der Fluß der Zeit. Bei $r=2M$, das entspricht tensoriell dargestellt

$\frac{(\Gamma^\alpha)_{0,0}}{g_{0,0}}$ (Γ stellen die Christoffel Symbole dar ...immer dran denken: Die Diagonalen der Matrix werden mit 1 besetzt), geht die Beschleunigung gegen unendlich.

Jetzt werde ich immer wieder mal den Standpunkt wechseln. Wir begeben uns weit weit weg vom Geschehen und beobachten von dort oder: Wir sind mitten im Geschehen drin und erzählen, was wir dort erleben

```
> Dlsch := dlmatrix( sch, coord );
```

```
Cf1 := Christoffel ( Dlsch );
```

```
displayGR(Christoffel1,%);
```

The Christoffel Symbols of the First Kind

non-zero components :

$$[11,2] = \frac{M}{r^2}$$

$$[12,1] = -\frac{M}{r^2}$$

$$[22,2] = -\frac{M}{(r-2M)^2}$$

$$[23,3] = r$$

$$[24,4] = r \sin(\theta)^2$$

$$[33,2] = -r$$

$$[34,4] = r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$[44,2] = -r \sin(\theta)^2$$

$$[44,3] = -r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

Die radial Komponenten der Beschleunigung werden:

> `get_compts(Cf1)[1,1,2]/get_compts(sch)[1,1];`

$$\frac{M}{r^2 \left(-1 + \frac{2M}{r} \right)}$$

Partikel, welche in diesen Radius eindringen werden vom Ursachen-Wirkungs Mechanismus des Universums ausgeklammert.

Deswegen nennt man diese magische Grenze auch Ereignishorizont in English: event horizon.

Das Fehlen oder nicht Vorhandensein einer wirklichen Singularität bei $r = R_g$ kann folgenderweise gezeigt werden:

Für den invariante Riemann Tensor gilt:

$$R_g \quad R_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \quad R^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta)}$$

Mit "raise" werden die kontravarianten Indices des Riemann Tensor erhöht. Ich gehe auf diese Indexmanipulationen nicht tiefer ein. Das wäre eine eigene Vorlesung über Tensoralgebra. Ist auch, denke ich, nicht allzu wichtig das wirklich zu verstehen. Nehmt es "einfach" mal hin. Wichtig ist, daß die unten begonnene Prozedur standardmäßig im Fortschritt des Aufsatzes für die verschiedenen Lösungen verwendet wird.

Literatur zur Tensor Indexbehandlung:

<http://baldufa.upc.es/xjaen/ttc/tutorial/inde.htm>

```
> schinv := invert( sch, 'detg' );
D2sch := d2metric( Dlsch, coord );
Cf1 := Christoffell ( Dlsch );
RMN := Riemann( schinv, D2sch, Cf1 );
```

```

raise(schinv, RMN, 1):
raise(schinv, %, 2):
raise(schinv, %, 3):
RMNinv := raise(schinv, %, 4):
prod(RMN, RMNinv, [1,1], [2,2], [3,3], [4,4]);
table([compts =  $\frac{48 M^2}{r^6}$ , index_char = [ ]])

```

..und besitzt **keine Singularität an seinem Horizont**. Dies ist eine einfache Koordinaten Singularität und ihr Sinn ist, daß es innerhalb des Horizonts keinerlei starre Koordinaten mehr gibt. Eine wirkliche Singularität ergibt sich bei $r=0$ und hat den Charakter einer Raum-ähnlichen Singularität. Darunter wird eine unabwendbare Singularität für einen Beobachter, der den Ereignishorizont überquer. Nun wird versucht, ob es gelingt einen Augenblicks Äquator Abschnitt des gekrümmten Raums auf den nicht gekrümmten Raum abzubilden.

```

> z(r)[1] = int(sqrt(2*r*M-4*M^2)/(-r+2*M), r);
z(r)[2] = int(-sqrt(2*r*M-4*M^2)/(-r+2*M), r);

```

$$z(r)_1 = -2 \sqrt{2 r M - 4 M^2}$$

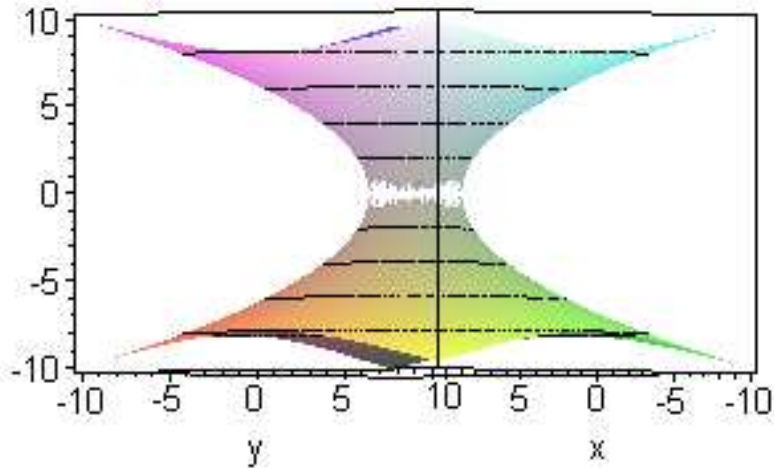
$$z(r)_2 = 2 \sqrt{2 r M - 4 M^2}$$

```

> plot3d( {subs( {M=1, r=sqrt(x^2+y^2)}, rhs(%%) ), subs( {M=
1, r=sqrt(x^2+y^2)}, rhs(%) ) }, x=-10..10, y=-
10..10, axes=boxed, style=PATCHCONTOUR, grid=
[200,200], title=`Schwarzes Loch Schwarzschild Typ mit
normierter masse 1`);

```

Schwarzes Loch Schwarzschild Typ mit normierter masse 1



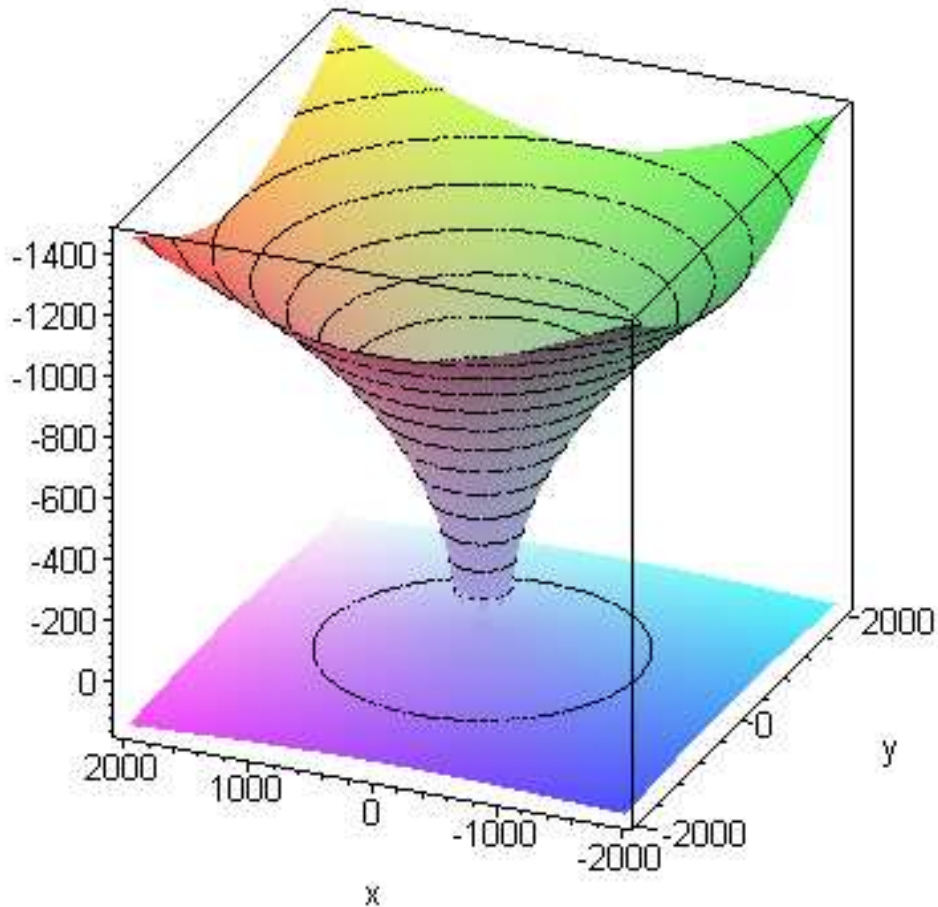
```
> z(r)[1] = int(sqrt(2*r*M-4*M^2)/(-r+2*M),r);
z(r)[2] = int(-sqrt(2*r*M-4*M^2)/(-r+2*M),r);
```

$$z(r)_1 = -2\sqrt{2rM - 4M^2}$$

$$z(r)_2 = 2\sqrt{2rM - 4M^2}$$

```
> plot3d({subs({M=1e2,r=sqrt(x^2+y^2)},rhs(%))},subs({M=
1,r=sqrt(x^2+y^2)},rhs(%))},x=-2000..2000,y=-
2000..2000,axes=boxed,style=PATCHCONTOUR,grid=
[200,200],title=`Schwarzes Loch Schwarzschild Typ mit
normierter Masse 100`);
```

Schwarzes Loch Schwarzschild Typ mit normierter Masse 100



Dies ist ein Schwarzes Loch mit einer Einschnürung, genannt **Einstein-Rosen Brücke**. Der innere sowie der äußere Weg zum Ereignishorizont sind die Wege zwischen verschiedenartigen aber identisch asymptotisch flachen Universen. Diese Brücke bezeichnet man im Film "Stargate" als Wurmloch. Dort wird das aber völlig falsch behandelt...ist ja auch nur ein netter Film!! Auf alle Fälle hat "unser" Wurmloch einen minimal Radius von "N. Man sollte jedoch bedenken, daß dieses Gebilde statisch nicht stabil ist, denn im Übergang von t nach $t + dt$ ist hier keine Zeit Verschiebung vorhanden.

Beide bilder lassen sehr deutlich erkennen, daß die Einschnürung bei größer werdender Masse deutlich länger wird.

Wir wollen nun diese erwähnte Koordinaten Singularität loswerden. Das wollen wir mit Hilfe einer Koordinatentransformation erreichen. Beispielsweise können wir die Null Geodäte $ds^2 = 0$ in der Schwarzschild Raumzeit als Radial Bewegung eines Lichtphotons mit

$$ds^2 dt^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_g}{r}\right)^2} \text{ ansehen..}$$

> `t = combine(int(-1/(1-R[g]/r),r));`
 $t = -r - R_g \ln(r - R_g)$

Wenn v die Konstante ist, welche die radial Komponente für eine feste Zeit t beschreibt, kann man anschreiben: Hiermit kann man den Ausdruck für $r < R[g]$ erweitern

> `t = -r - R[g]*ln(abs(-r/R[g]+1)) + v;`
 $t = -r - R_g \ln\left(\frac{r}{R_g} - 1\right) + v$

t wird differenziert unter Berücksichtigung der oben erwähnten Erweiterung (Substitution) nach dt^2 . Der Ausdruck für das Intervall in der Schwarzschild Metrik wird dann:

$d(r)^2$ zeigt das Differential in den neuen Koordinaten

```
> deform(f=0,w1=1,w2=1,w3=1,v=1,R[g]=0,r=0,v=0);
d(t)^2 = expand( subs( d(R[g])=0,d( -r-R[g]*ln( r/R[g]-1
)+v ) )^2 );
hlp:=subs( d(t)^2=rhs(%),sch_compts[1,1]*d(t)^2 ) +
sch_compts[2,2]*d(r)^2 + sch_compts[3,3]*d(theta)^2 +
sch_compts[4,4]*d(phi)^2;
new_metric:=collect( simplify( subs(R[g]=2*M,hlp) ),{d(r)
^2,d(v)^2});
```

$$d(t)^2 = \frac{r^2 d(r)^2}{(r - R_g)^2} - \frac{2 r d(r) d(v)}{r - R_g} + d(v)^2$$

new_metric :=

$$-\frac{(r - 2M) d(v)^2}{r} + 2 d(r) d(v) - \frac{-r^3 d(\theta)^2 - r^3 d(\phi)^2 + r^3 d(\phi)^2 \cos(\theta)^2}{r}$$

Wir haben damit ein neues ineares Element erhalten. Das ist als Eddington-Finkelstein Koordinate bekannt.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_g}{r}\right) dV^2 + 2dvdr + r^2 d(\Omega)^2 \quad d(\Omega) \text{ ist der spärische Anteil.}$$

Die zugehörige Metrik hat in der Umgebung von r regulären Charakter, Ausnahme bei $r=0$. Zusammenfassend nehmen wir an, daß eine Abweichung von der sphärischen

Symmetrie für statische Schwarze Löcher verbleibt. Eine solche Abweichung kann beschrieben werden mit Hilfe des Quadrupol Moments q . Erez und Rosen haben die zugehörige Metrik mit axialer Symmetrie gefunden.

Literatur;

http://www.osti.gov/energycitations/product.biblio.jsp?osti_id=6825325

```
er_compt      Metrische Komponenten
er_compts[1,1] Koeffizienten von d(lambda)^2 im Interval
er_compts[2,2] Koeffizienten von d(mu)^2 im Interval
er_compts[3,3] Koeffizienten von d(phi)^2 im Interval
er_compts[4,4] Axial symmetrische Metrik nach Erez-Rosen
er
```

```
> coord := [t, lambda, mu, phi]:
er_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4):
er_compts[1,1] := -exp(2*psi):# coefficient of d(t)^2 in
interval
er_compts[2,2] := M^2*exp(2*gamma-2*psi)*(lambda^2-mu^2)/
(lambda^2-1):
er_compts[3,3] := M^2*exp(2*gamma-2*psi)*(lambda^2-mu^2)/
(1-mu^2):
er_compts[4,4] := M^2*exp(-2*psi)*(lambda^2-1)*(1-mu^2):
er := create([-1,-1], eval(er_compts));
```

```
er := table([compts =
```

$$\begin{bmatrix} -e^{(2\psi)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M^2 e^{(2\gamma-2\psi)} (\lambda^2 - \mu^2)}{\lambda^2 - 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M^2 e^{(2\gamma-2\psi)} (\lambda^2 - \mu^2)}{1 - \mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M^2 e^{(-2\psi)} (\lambda^2 - 1) (1 - \mu^2) \end{bmatrix}, index_char = [-1, -1]$$

mit

```
> f1 := psi = 1/2*( (1+q*(3*lambda^2-1)*(3*mu^2-1)/4)*ln
((lambda-1)/(lambda+1))+3/2*q*lambda*(3*mu^2-1) );
f2 := gamma = 1/2*(1+q+q^2)*ln((lambda^2-1)/(lambda^2-mu^
2))-3/2*q*(1-mu^2)*(lambda*ln((lambda-1)/(lambda+1))+2)+
9/4*q^2*(1-mu^2)*((lambda^2+mu^2-1-9*lambda^2*mu^2)*
(lambda^2-1)/16*ln((lambda-1)/(lambda+1))^2+(lambda^2+7
*mu^2-5/3-9*mu^2*lambda^2)*lambda*ln((lambda-1)/(lambda+
1)))/4+1/4*lambda^2*(1-9*mu^2)+(mu^2-1/3) );
f3 := lambda = r/M-1;
f4 := mu = cos(theta);
```

$$f1 := \psi = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{q(3\lambda^2 - 1)(3\mu^2 - 1)}{4} \right) \ln \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) + \frac{3q\lambda(3\mu^2 - 1)}{4}$$

$$f2 := \gamma = \frac{1}{2} (1 + q + q^2) \ln \left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - \mu^2} \right) - \frac{3}{2} q (1 - \mu^2) \left(\lambda \ln \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) + 2 \right) + \frac{9}{4} q^2 (1 - \mu^2) \\ \frac{1}{16} (\lambda^2 + \mu^2 - 1 - 9\lambda^2\mu^2) (\lambda^2 - 1) \ln \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^2$$

$$+ \frac{1}{4} \left(\lambda^2 + 7\mu^2 - \frac{5}{3} - 9\lambda^2\mu^2 \right) \lambda \ln \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) + \frac{\lambda^2(1 - 9\mu^2)}{4} + \mu^2 - \frac{1}{3}$$

$$f3 := \lambda = \frac{r}{M} - 1$$

$$f4 := \mu = \cos(\theta)$$

Im Fall des Quadrupolmoments $q=0$ wir erhalten

```
> get_compts(er):
hlp_1:=map2(subs,{psi=rhs(f1),gamma=rhs(f2)},%):
hlp_2:=map2(subs,q=0,hlp_1):
hlp_3:=map2(subs,{lambda=rhs(f3),mu=rhs(f4)},hlp_2):
erg:=map(simplify,hlp_3);
```

$$erg := \begin{bmatrix} -\frac{r-2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{rM^2}{r-2M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{\sin(\theta)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

Das beschreibt die Schwarzschild Metrik unter Berücksichtigung von f3 und f4. Jetzt gilt es noch den Ereignishorizont als nicht Null Fall des quadruple Moments zu finden.

Für das statische Feld $\frac{\partial}{\partial t} g_{\alpha, \beta} = 0$ ist die korrespondierende Bedingung: $g_{0,0} = 0$.
Damit folgt:

```

> hlp_1:=map2(subs,psi=rhs(f1),er):
er2 := map2(subs,gamma=rhs(f2),hlp_1):
r_krumm_invari:=get_compts(er2)[1,1];
r_krumm_invari := -e⎛⎜⎝1 +  $\frac{q(3\lambda^2-1)(3\mu^2-1)}{4}$ ⎞⎟⎠ \ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right) + \frac{3q\lambda(3\mu^2-1)}{2}}

```

Das entspricht $r=2M(\lambda=1)$. Jedoch ist das Ergebnis für invariante Krümmung:

```

> erinv := invert( er2, 'detg' ):
D1er := dlmetric( er2, coord ):
D2er := d2metric( D1er, coord ):
Cf1 := Christoffel1 ( D1er ):
RMN := Riemann( erinv, D2er, Cf1 ):
raise(erinv,RMN,1):
Riemann Tensor
raise(erinv,%,2):
raise(erinv,%,3):
RMNinv := raise(erinv,%,4):
prod(RMN,RMNinv,[1,1],[2,2],[3,3],[4,4]):
get_compts(%):
series(%,q=0,2):Reihenentwicklung q
convert(%,polynom):
res := simplify(%):

```

Raufziehen der Indizes im

Im sphärischen Fall ergibt sich dann: erg_fac das ist $48M^2/r^6$

```

> fac:=factor( subs(q=0,res) ):
erg_sph:=subs(lambda=1,fac);
erg_sph :=  $\frac{3}{4M^4}$ 

```

Es gibt also keine Singularität. Anwendung von L'Hospital's Regel für den Grenzwert:

```

> hlp:=subs(mu=0,res):
grenze_Zähler:=limit(diff( numer(hlp), lambda), lambda=1);
grenze_Nenner:=limit(diff( denom(hlp), lambda), lambda=1);
grenze_Zähler := -signum(q) ∞
grenze_Nenner := 64 M4

```

Also doch: es ist eine wirkliche Singularität am Ereignishorizont vorhanden, die hinsichtlich der Demonstration der Unmöglichkeit der statisch axialen symmetrischen Schwarzen Löchern mit einem nicht Null quadrupolem Moment beachtet werden muß.

Vermutung:

Solche Momente werden durch die Gravitationswellen während der Entstehung eines solchen Schwarzen Loches offensichtlich "weggespült".

Diese Möglichkeit käme in Betracht, wenn diese Singularität tatsächlich aufträte. Ich kann es nicht beantworten.

Reissner-Nordstrom Schwarzes Loch oder das geladene Schwarze Loch

Die Verallgemeinerung der Schwarzschild Metrik im Falle der spherisch symmetrischen Vakuum Lösung der verbundenen Einstein-Maxwell Gleichungen kann folgendermaßen dargestellt werden:

```
rn_compts      Metrische Komponenten
rn_compts[1,1] Koeffizienten von d(t)^2 im Intervall
rn_compts[2,2] Koeffizienten von d(r)^2 im Intervall
rn_compts[3,3] Koeffizienten von d(theta)^2 im Intervall
rn_compts[4,4] Koeffizienten von d(phi)^2 im Intervall
rn             Reissner-Nordstrom (RN) Metrik
```

```
> coord := [t, r, theta, phi]:
rn_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4):
rn_compts[1,1] := -(1-2*M/r+Q^2/r^2):
rn_compts[2,2] := 1/(1-2*M/r+Q^2/r^2):
rn_compts[3,3] := g_matrix[3,3]:
rn_compts[4,4] := g_matrix[4,4]:
rn := create([-1,-1], eval(rn_compts));
```

$$rn := \text{table}([compts = \begin{bmatrix} -1 + \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix},$$

```
index_char = [-1, -1]
```

```
)
```

Q ist die elektrische Ladung, Die Metrik hat 3 Singularitäten: r=0, r_p und r_n

```
> extrem := denom(get_compts(rn)[2,2]) = 0;
r_p := solve(extrem, r)[1];
r_n := solve(extrem, r)[2];
extrem := r^2 - 2 r M + Q^2 = 0
```

$$r_p := M + \sqrt{M^2 - Q^2}$$

$$r_n := M - \sqrt{M^2 - Q^2}$$

Wir berechnen die Invarianz der Krümmung ... der Riemann Tensor beschreibt die Krümmung

```
> rninv := invert( rn, 'detg' );
D1rn := d1metric( rn, coord );
D2rn := d2metric( D1rn, coord );
Cf1 := Christoffel1 ( D1rn );
RMN := Riemann( rninv, D2rn, Cf1 );
raise(rninv,RMN,1): raise of indexes in Riemann tensor
raise(rninv,% ,2):
raise(rninv,% ,3):
RMNinv := raise(rninv,% ,4):
prod(RMN,RMNinv,[1,1],[2,2],[3,3],[4,4]);
table([compts =  $\frac{8(6r^2M^2 - 12rMQ^2 + 7Q^4)}{r^8}$ , index_char = [ ]])
```

Nichtphysikalische Wurzel des Zählers mit der nicht-Null Komponenten der Ladung Q

```
> loes_r := solve(get_compts(%), r);
```

$$loes_r := \frac{\left(1 + \frac{1}{6}I\sqrt{6}\right)Q^2}{M}, \frac{\left(1 - \frac{1}{6}I\sqrt{6}\right)Q^2}{M}$$

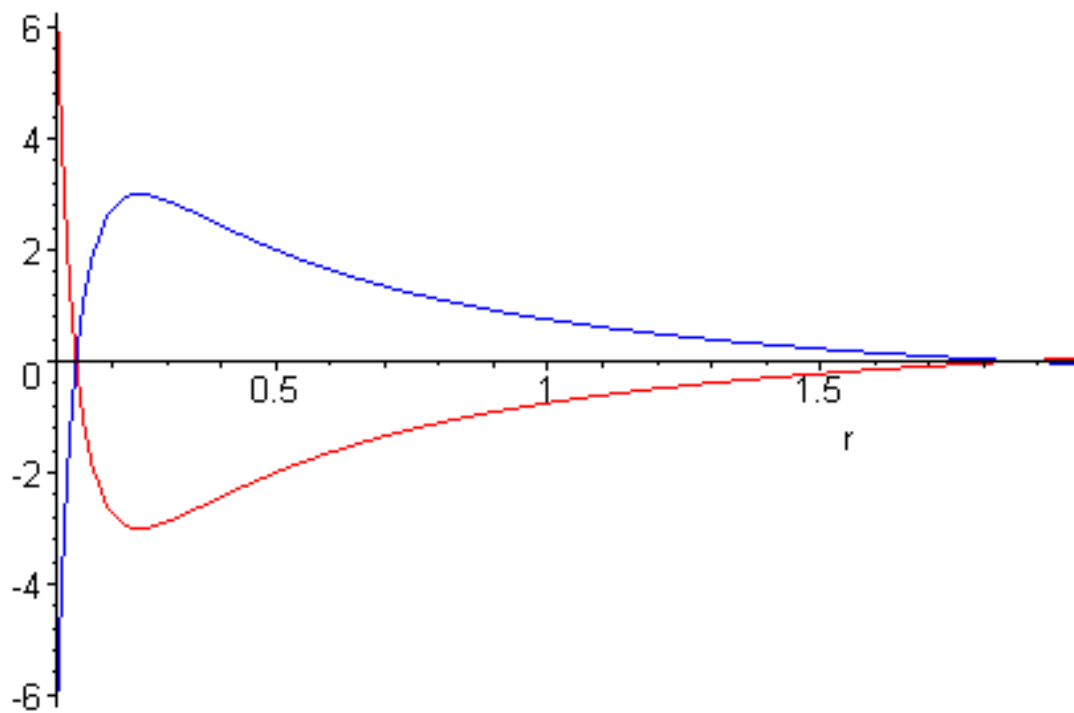
So sieht es aus:

**eine Singularität aus der Schwarzschild Metrik,
die anderen beiden als "Augenblicks-Singularitäten" mit Koordinaten
Charakter.**

Wir schauen uns das mal in einem Bild an: Dazu plotten wir die Ergebnisse der ersten beiden Terme der linearen Näherung so. Zur weiteren Verdeutlichung plotten wir den inversen Wert des zweiten Terms, um die Divergenz wegen der Koordinatensingularität zu umgehen.

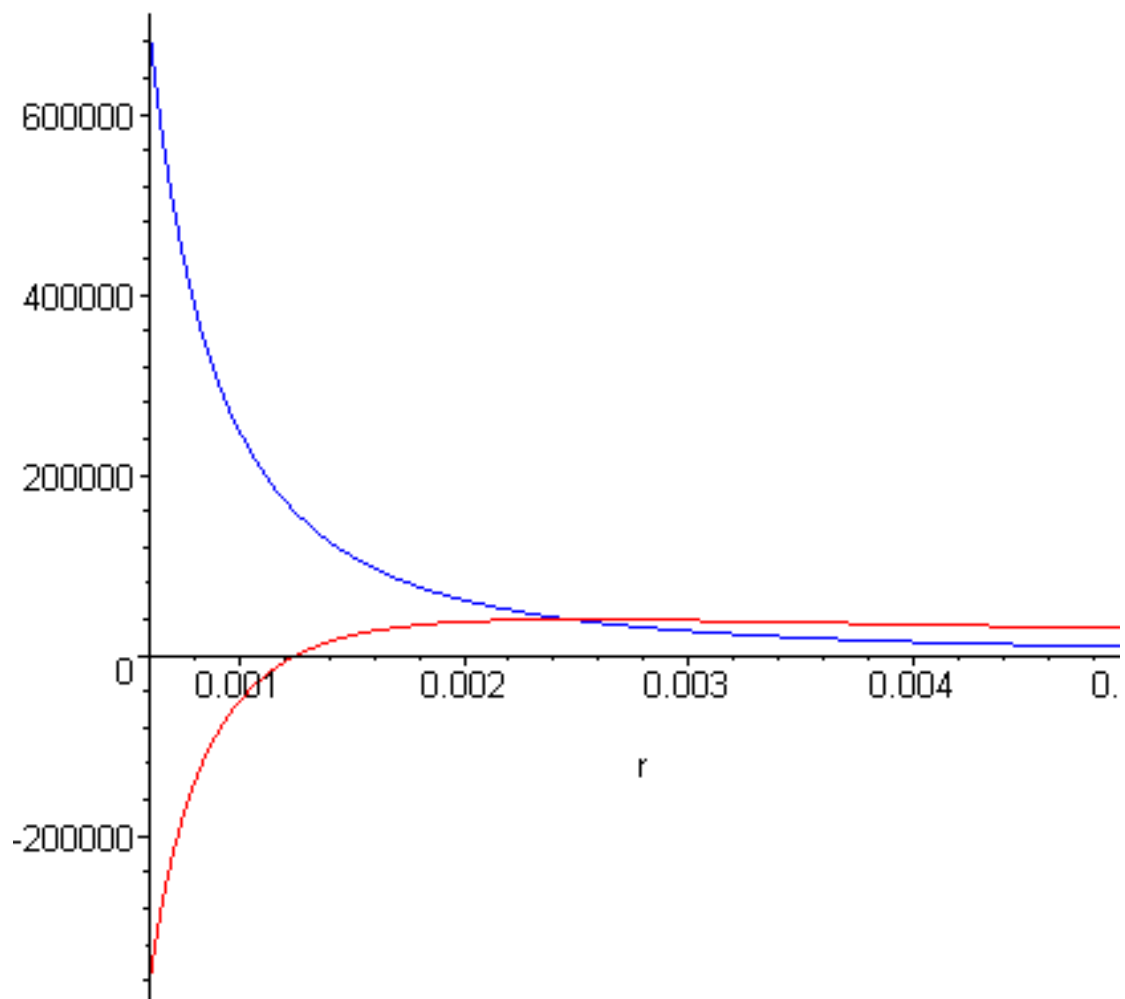
```
> plot({subs({M=1,Q=1/2},get_compts(rn)[1,1]),
subs({M=1,Q=1/2},1/get_compts(rn)[2,2])},
r=0.1..3, color=[red,blue],title=`Werte der ersten (rot)
und zweiten (blau) Terms der linearen Näherung mit
normierter Masse = 1`);
```

Werte der ersten (rot) und zweiten (blau) Terms der linearen Näh



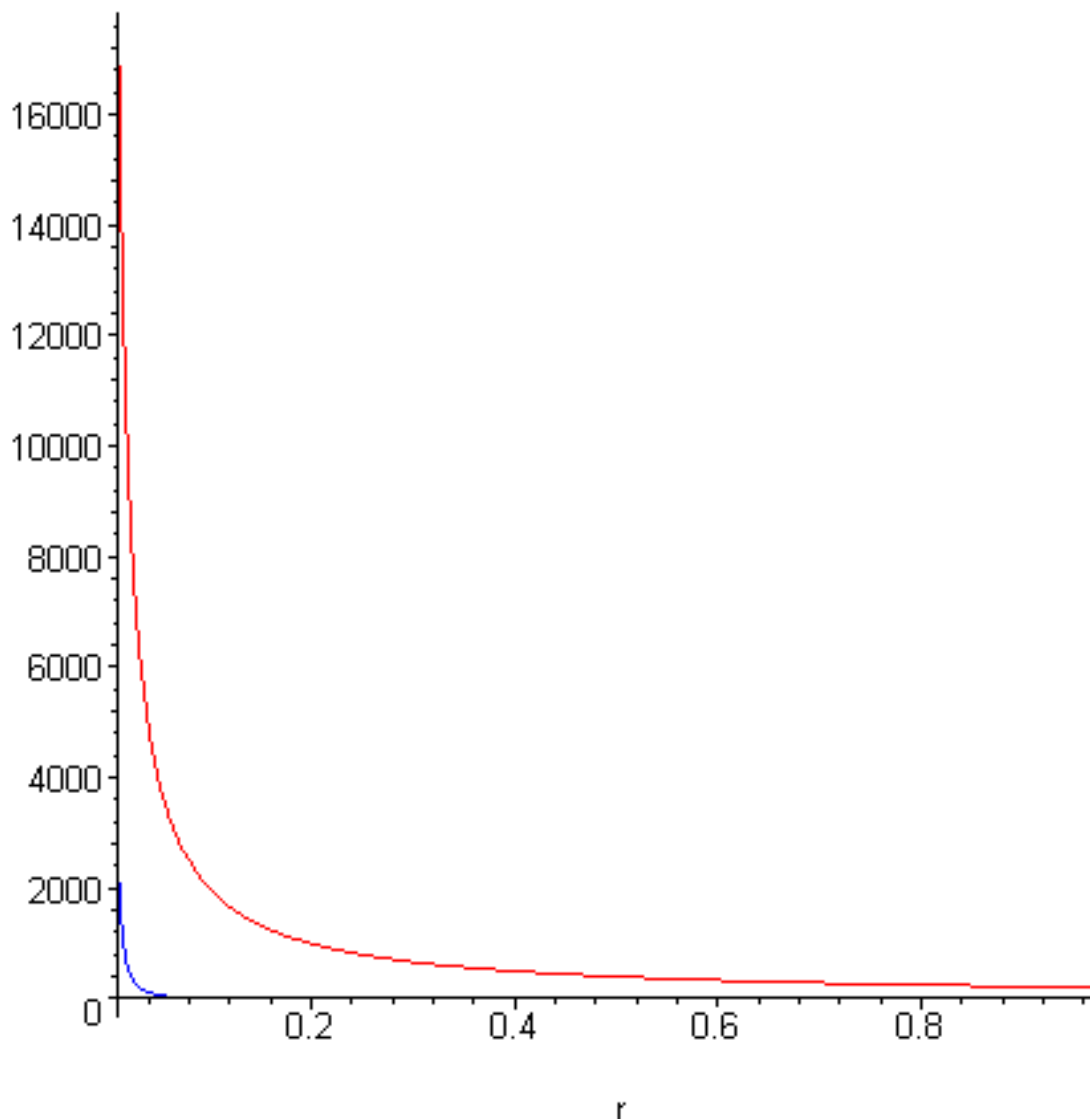
```
> plot({subs({M=1e2,Q=1/2},get_compts(rn)[1,1]),  
subs({M=1,Q=1/2},1/get_compts(rn)[2,2])},  
r=6e-4..5e-3, color=[red,blue],title=`Werte der ersten  
(rot) und zweiten (blau) Terms der linearen Näherung mit  
normierter Masse = 100`);
```

Werte der ersten (rot) und zweiten (blau) Terms der linearen Näherung mit



```
> plot({subs({M=1e2,Q=1/2},get_compts(rn)[1,1]),  
subs({M=1,Q=1/2},1/get_compts(rn)[2,2])},  
r=1e-2..1, color=[red,blue],title=`Werte der ersten (rot)  
und zweiten (blau) Terms der linearen Näherung mit  
normierter Masse = 100`);
```

Werte der ersten (rot) und zweiten (blau) Terms der linearen Näherung mit



Dieser radiale Unterschied zum Schwarzschild Schwarzen Lochs ist so schön zu sehen. Wir sehen bei ca. "0.1", daß sich Raum und Zeit austauschen. Das passiert in der Region, in welcher gilt: $r_n < r < r_p$ zwischen dem inneren und äußeren Ereignishorizont, der roten und blauen Linie. Quasi kann die positive Achse als Raum, die negative Achse als Zeit angesehen werden. Trotzdem gibt es die bekannte Anzeichen eines gewissen Zeitcharakters, so daß der ins Schwarze loch fallende Beobachter (der Ärmste!!) diese Singularität nicht erlebt. Wenn er nicht dabei "vor die Hunde" geht, wird er "in der Zeit" stetig langsamer und in unendlich Jahren bleibt für diesen Beobachter die Zeit "einfach" stehen. Ein externer, weit entfernter Beobachter sieht jedoch seinen Kollegen verschwinden.

Die nächste Unterschied ist das Ausbleiben der Koordinaten Singularität wenn: $M^2 < Q^2$. Das wird auch "nackte" Singularität genannt. Man kann sogar zeigen, daß hier wirklich keine solche Singularität als Ergebnis des normalen Zusammenbruchs des Sterns mit Masse M sowie Ladung Q auftritt. Die Gesamtenergie -als Newton Grenze, jedoch mit Korrektur aus der speziellen Relativität, mit M_0 als Ruhemasse, ist: Die geometrischen Einheiten der Ladung werden ausgenutzt, so daß das Coulomb

Gesetz $G \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$ erfüllt wird.

Bei dem massereicheren Schwarzen Loch erkennen wir nur eine solche Überkreuzung.

```
> en := M(r) = M_0 + Q^2/r - M(r)^2/r;
loes := solve(en,M(r));
```

$$en := M(r) = M_0 + \frac{Q^2}{r} - \frac{M(r)^2}{r}$$

$$loes := -\frac{r}{2} + \frac{\sqrt{r^2 + 4 M_0 r + 4 Q^2}}{2}, -\frac{r}{2} - \frac{\sqrt{r^2 + 4 M_0 r + 4 Q^2}}{2}$$

Die Wahl für die Lösung (loes) oben wird durch die Korrektur Asymptote bestimmt:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} sol = M_0:$$

```
> if limit(loes[1],r=infinity)=M_0 then true_loes := loes
[1] fi:
if limit(loes[2],r=infinity)=M_0 then true_loes := loes
[2] fi:
true_loes:=true_loes;
```

$$true_loes := -\frac{r}{2} + \frac{\sqrt{r^2 + 4 M_0 r + 4 Q^2}}{2}$$

```
> hlp_1:=diff(true_loes,r):
hlp_2:=subs(M_0=solve(en,M_0),hlp_1):
M_0_erg:=simplify(hlp_2,radical,symbolic);
```

$$M_0_erg := \frac{-Q^2 + M(r)^2}{(r + 2 M(r)) r}$$

$$\frac{d}{dr} M(r) = \frac{M(r)^2 - Q^2}{r(r + 2 M(r))}$$

Der Zusammenbruch ist möglich mit abnehmendem Abstand R. Damit gewinnt die Gravitation Oberhand über die Kraft oder Wirkung der Ladung. Das ist dann möglich, wenn $M^2 > Q^2$ wird. Diese Grenze wird erreicht bei:

```
> M_limit:=limit(true_loes,r=0);
M_limit := \sqrt{Q^2}
```

Das löst das Problem der unendlichen Eigenenergie geladener Partikel. Mal sehen, wie sich der Druck des Zusammenbruchs der geladenen Sphäre verhält im Vergleich

der Staubpartikel der Schwarzschild Metrik

$d(s)^2$ Reissner-Nordstrom (RN) Metrik
 $d(\tau)^2$ τ ist die wirkliche Zeit, die für einen Beobachter auf der Oberfläche der Sphäre gilt
 $\text{subs}(\{d(t)$ dahinter steht an und für sich: $d(t)/d(\tau)=E/(1-2*M/r+Q^2/r^2)$
 pot_1 Potential beim entfernten Beobachter
 pot_2 Potential beim kollabierenden Beobachter

```

> r := 'r':
E := 'E':
subs( r=r(t),get_compts(rn) ):
d(s)^2 = %[1,1]*d(t)^2 + %[2,2]*d(r)^2;
d(tau)^2 = collect(subs( d(r)=diff(r(t),t)*d(t),rhs(%)
),d(t));
%/d(tau)^2;
subs( {d(t)=E/(1-2*M/r(t)+Q^2/r^2),d(tau)=1},%);
pot_1 := factor( solve(%,(diff(r(t),t))^2) ):
pot_2 := simplify(pot_1*(E/(1-2*M/r(t)+Q^2/r^2))^2): d/d
(t)=(d/d(tau))*(1-2*M/r+Q^2/r^2)/E;
  
```

$$d(s)^2 = \left(-1 + \frac{2M}{r(t)} - \frac{Q^2}{r(t)^2} \right) d(t)^2 + \frac{d(r)^2}{1 - \frac{2M}{r(t)} + \frac{Q^2}{r(t)^2}}$$

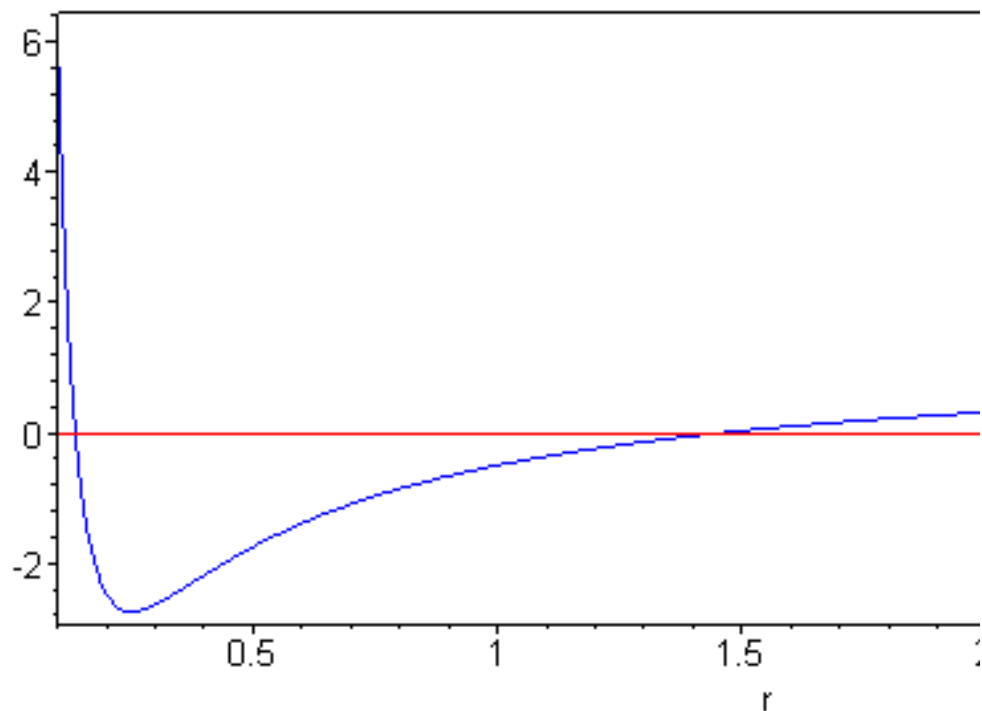
$$d \left(\int \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}} dr \right)^2 = \left(-1 + \frac{2M}{r(t)} - \frac{Q^2}{r(t)^2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} r(t) \right)^2}{1 - \frac{2M}{r(t)} + \frac{Q^2}{r(t)^2}} \right) d(t)^2$$

$$1 = \frac{\left(-1 + \frac{2M}{r(t)} - \frac{Q^2}{r(t)^2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} r(t) \right)^2}{1 - \frac{2M}{r(t)} + \frac{Q^2}{r(t)^2}} \right) d(t)^2}{\left(\int \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}} dr \right)^2}$$

$$1 = \frac{\left(-1 + \frac{2M}{r(t)} - \frac{Q^2}{r(t)^2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} r(t) \right)^2}{1 - \frac{2M}{r(t)} + \frac{Q^2}{r(t)^2}} \right) E^2}{\left(1 - \frac{2M}{r(t)} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^2}$$

$$\frac{d}{d(t)} = \frac{d \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)}{d \left(\int \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}} dr \right) E}$$

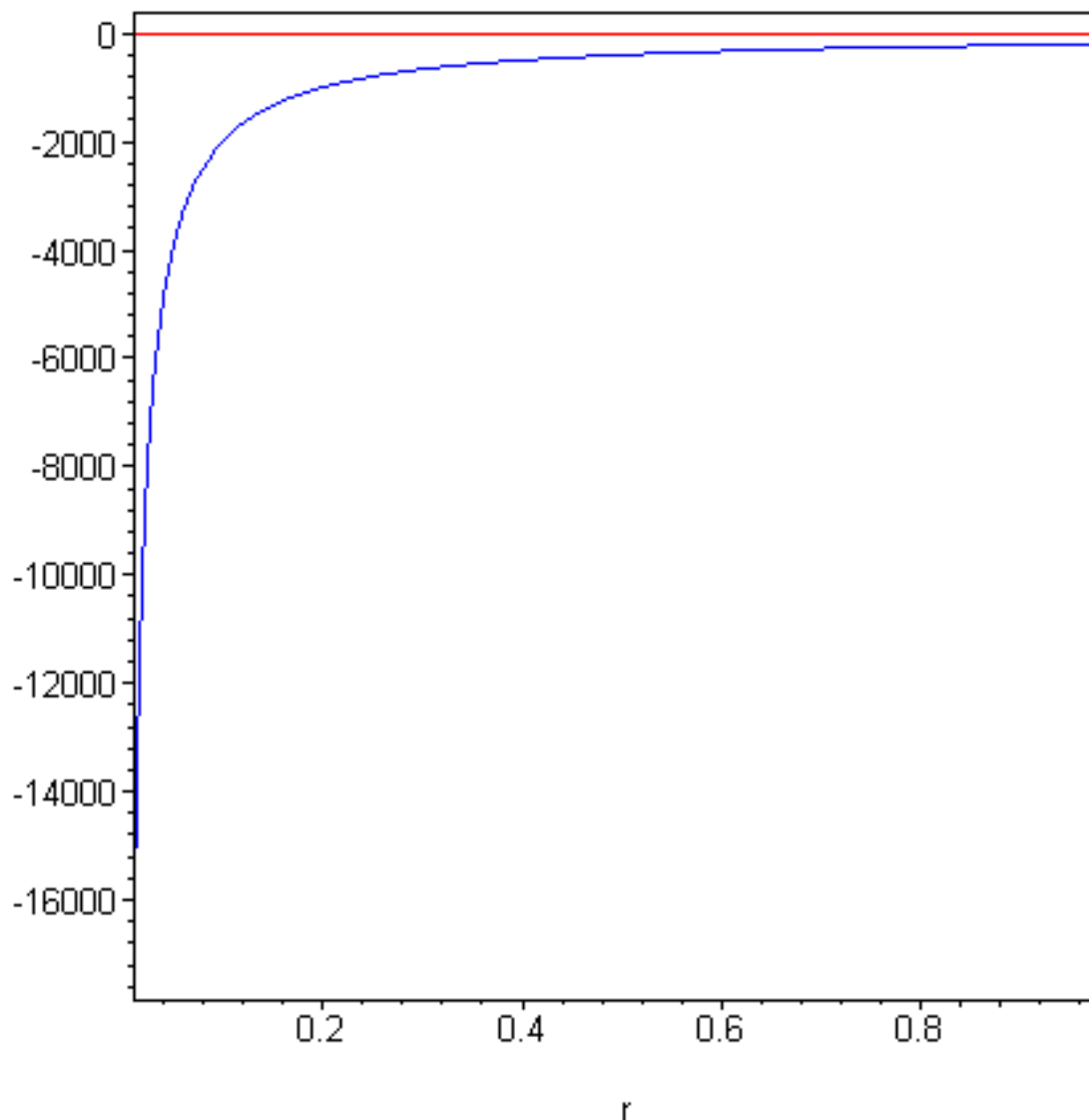
```
> plot({subs({E=0.5,M=1,Q=1/2,r(t)=r},pot_2),0*r},r=
0.1..3,axes=boxed,color=[red,blue],
> title=`(dr/dtau)^2 und Potential bezogen auf r aus Sicht
des kollabierenden Beobachters bei einer normierten Masse
= 1`);
(dr/dtau)^2 und Potential bezogen auf r aus Sicht des kollabierenden Be
```



```
> plot({subs({E=0.5,M=1e2,Q=1/2,r(t)=r},pot_2),0*r},r=
```



```
0.01..1,axes=boxed,color=[red,blue],title=`(dr/dtau)^2
und Potential bezogen auf r aus Sicht des kollabierenden
Beobachters bei einer normierten Masse = 100`);
(dr/dtau)^2 und Potential bezogen auf r aus Sicht des kollabierenden Beo
```



Der Unterschied zum Schwarzschild Zusammenbruch ist offensichtlich: Der Beobachter kreuzt den äußeren sowie den inneren Ereignishorizont, jedoch wird er die Singularität nie erreichen, da der Zusammenbruch des Sterns als "Weißes Loch" passiert. Das begründet sich durch den Rückstrom mit direkt anschließendem "Gegenkollaps" usw. Ist die Masse des Schwarzen Lochs jedoch größer, erkennen wir, daß der Beobachter die beiden Horizonte nicht kreuzt.

Den Extremfall $M^2 = Q^2$ erhalten wir bei:

```
> hlp:=subs(Q^2=M^2, get_compts(rn));
fac:=factor(hlp[1,1]);
```

$$hlp := \begin{bmatrix} -1 + \frac{2M}{r} - \frac{M^2}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{M^2}{r^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

$$fac := -\frac{(r-M)^2}{r^2}$$

Die Koordinaten Singularität erkennen wir bei $r=M$. Was passiert nun mit dem zweiten Ereignishorizont? Dazu müssen wir den Abstand der beiden Horizonte ermitteln und die Zeit t sowie den Winkel der Koordinaten der RN Metrik festlegen

Es gibt dazu 2 Möglichkeiten, dieses auszudrücken: entweder über die Reissner-Nordstrom (RN) Metrik oder über die Abstände

> `get_compts(rn):`

`d(s)^2 = %[2,2]*d(r)^2;`

RN metric

or

`d(s)^2 = d(r)^2/expand((1-r_p/r)*(1-r_n/r));` Zweite Art:

Abstände

$$d(s)^2 = \frac{d(r)^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}$$

$$d(s)^2 = \frac{d(r)^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}$$

Es gilt bei $r_p \rightarrow r_n$ ($M^2 - Q^2 \rightarrow 0$)

r_p : äußerer Ereignishorizont

r_n : innerer Ereignishorizont

> `r_p := 'r_p':`

`r_n := 'r_n':`

`s = Int(1/sqrt((1-r_p/r)*(1-r_n/r)), r=r_n..r_p) ;`

`simplify(value(rhs(%)),radical,symbolic);`

$$s = \int_{r_n}^{r_p} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{r_p}{r}\right)\left(1 - \frac{r_n}{r}\right)}} dr$$

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} r_p \ln(r_n - r_p) - \frac{1}{2} r_n \ln(r_n - r_p) + \frac{1}{2} r_p \ln(r_p - r_n) \\ &+ \frac{1}{2} r_n \ln(r_p - r_n) \end{aligned}$$

Wir erhalten: $s \rightarrow \infty$. Das bedeutet, daß wir eine unendlich lange **Einstein-Rosen Brücke "Wurmloch"** vorfinden. Damit entfällt hier die Vorstellung der Verbindung zweier flacher Universen. Diese Tatsache kann auch interpretiert werden als Einbettung in die äquatorial Sektion des statischen Reissner-Nordstrom Raums in einem flachen Euklidischen Universums.

Wir setzen gleich: Radial Elemente der Intervalle mit M=1

`> d(r)^2/(1-1/r)^2 = (1+diff(z(r),r)^2)*d(r)^2;`
`diff(z(r),r) = solve(%,diff(z(r),r))[1];`
`einbettung:=dsolve(%,z(r));`

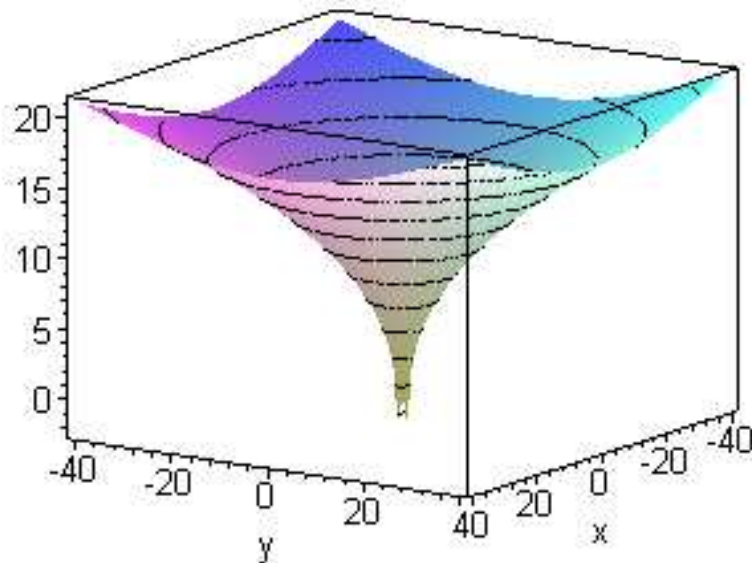
$$\frac{d(r)^2}{\left(1 - \frac{1}{r}\right)^2} = \left(1 + \left(\frac{d}{dr} z(r)\right)^2\right) d(r)^2$$

$$\frac{d}{dr} z(r) = \frac{\sqrt{2r-1}}{r-1}$$

`einbettung := z(r) = 2*sqrt(2*r-1) + ln(sqrt(2*r-1)-1) - ln(sqrt(2*r-1)+1) + _C1`

`> plot3d(subs(r=sqrt(x^2+y^2),2*sqrt(2*r-1)+ln(sqrt(2*r-1)-1)-ln(sqrt(2*r-1)+1)),x=-40..40,y=-40..40,axes=boxed,style=PATCHCONTOUR,grid=[200,200],title=`Extremes Reissner-Nordstrom Schwarzes Loch`);`

Extremes Reissner-Nordstrom Schwarzes Loch



Das asymptotische Verhalten der RN metrik $r \rightarrow \infty$ entspricht der Minkowski Vorstellung des gekrümmten Raums. Zur Einführung dieser Vorstellung $r \rightarrow M$, werden wir neue Koordinaten brauchen.

Literatur:

<http://deposit.ddb.de/cgi-bin/dokserv?idn=973910429>

<http://www.pnas.org/cgi/content/abstract/83/7/1978>

<http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2004-9/articlesu20.html>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Reissner-Nordstrom-Metrik>

```
> rn_assym := subs( {r=M*(1+lambda),Q^2=M^2},get_compts
(rn) );
```

$$rn_assym := \begin{bmatrix} -1 + \frac{2}{\lambda + 1} - \frac{1}{(\lambda + 1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2}{\lambda + 1} + \frac{1}{(\lambda + 1)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & M^2 (\lambda + 1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & M^2 ($$

m1
m2
d(s)^2

Reihenentwicklung: nur der Hauptterm für lambda verbleibt wie m1

spheric_part d(omega) ist der sphärische Anteil

```
> m1 := series(rn_asymp[1,1], lambda=0, 3);
m2 := series(rn_asymp[2,2], lambda=0, 3);
spheric_part:=d(s)^2 = convert(m1,polynom)*d(t)^2 + M^2
*convert(m2,polynom)*d(lambda)^2 + M^2*d(Omega)^2;
m1 := -lambda^2 + O(lambda^3)
m2 := lambda^-2 + O(lambda^-1)
```

$$spheric_part := d(s)^2 = -\lambda^2 d(t)^2 + \frac{M^2 d(\lambda)^2}{\lambda^2} + M^2 d(\Omega)^2$$

Diese metrik heißt: Robinson-Bertotti Metrik. Der letzte term beschreibt die 2-dimensionale Shäre mit Radius M. Die Dimensionen werden in der Umgebung des Ereignishorizonts zusammengestaucht.. Das entspricht durchaus der "anti-de Sitter" Raumzeitverhalten (kommt gleich) mit konstant negativer Krümmung.

Literatur:

<http://www.iop.org/EJ/abstract/0264-9381/17/2/314/>
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:hep-th/0306194>
http://www.osti.gov/energycitations/product.biblio.jsp?osti_id=20510506
http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1979__31_4_355_0

Kerr Schwarzes Loch oder das Schwarze Loch mit Eigenrotation

Die allgemeine Form der stationären Rotation eines Schwarzen Lochs wird mit der ***Kerr-Newman Metrik*** beschrieben. Darin werden **Boyer-Linquist Koordinaten** verwendet:

kn_compts	Metrische komponenten mit $a=J/M$ J ist das Winkel Moment
kn_compts[1,1]	Koeffizienten von $d(t)^2$
kn_compts[1,4]	Koeffizienten von $d(t)*d\phi$
kn_compts[2,2]	Koeffizienten von $d(r)^2$
kn_compts[3,3]	Koeffizienten von $d(\theta)^2$
kn_compts[4,4]	Koeffizienten von $d(\phi)^2$
kn	Kerr-Newman (KN) Metrik

Literatur:

<http://www.math.ucla.edu/~bon/kerr/intro4.html>
<http://www.math.ucla.edu/~bon/kerr/intro4.html>
<http://www.springerlink.com/content/t360068671453518/>
<http://www.springerlink.com/content/rg03v7p7046555t2/>

```

> coord := [t, r, theta, phi]:
kn_compts :=
array(sparse,1..4,1..4):

kn_compts[1,1] :=
-(Delta-a^2*sin(theta)^2)/Sigma:

kn_compts[1,4] :=
-2*a*sin(theta)^2*(r^2+a^2-Delta)/Sigma:

kn_compts[2,2] :=
Sigma/Delta:

kn_compts[3,3] :=
Sigma:

kn_compts[4,4] :=
((r^2+a^2)^2-Delta*a^2*sin(theta)^2)/Sigma)*sin(theta)^
2:

kn := create([-1,-1], eval(kn_compts));

```

mit P als *magnetische Ladung*

```

sub_1 := Sigma = r^2+a^2*cos(theta)^2;
sub_2 := Delta = r^2-2*M*r+a^2+sqrt(Q^2+P^2);

```

```

kn := table([compts =

```

$$\begin{bmatrix} -\frac{\Delta - a^2 \sin(\theta)^2}{\Sigma} & 0 & 0 & -\frac{2 a \sin(\theta)^2 (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{((r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin(\theta)^2) \sin(\theta)}{\Sigma} \end{bmatrix}$$

```

,
index_char = [-1, -1]
])

```

$$sub_1 := \Sigma = r^2 + a^2 \cos(\theta)^2$$

$$sub_2 := \Delta = r^2 - 2 r M + a^2 + \sqrt{Q^2 + P^2}$$

Sind keine Ladungen vorhanden, erhalten wir die Kerr Metrik.

Deren Singularitäten sind mit Ausnahme der normalen Singularität bei der

Koordinate $s^\theta = 0$:

r_p: äußerer Ereignishorizont

r_n: innerer Ereignishorizont

```
> r_p := solve( subs({Q=0,P=0},rhs(sub_2))=0,r )[1];
r_n := solve( subs({Q=0,P=0},rhs(sub_2))=0,r )[2];
singularitaet:=solve( subs({Q=0,P=0},rhs(sub_1))=0,theta
);
```

$$r_p := M + \sqrt{M^2 - a^2}$$

$$r_n := M - \sqrt{M^2 - a^2}$$

$$\text{singularitaet} := \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsinh}\left(\frac{r}{a}\right)I, \frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsinh}\left(\frac{r}{a}\right)I$$

Die letzte Singularität wird bei $r=0$ bzw. $\theta = \frac{\pi}{2}$ auftreten. Wie bei dem ladungs-Schwarzen Loch, erhalten wir verschiedene Situationen:

$$M^2 < a^2$$

$$M^2 = a^2$$

$$M^2 > a^2$$

Wir werden sehen was bei $g_{0,0}$, $g_{1,1}$, $g_{4,4}$ das heißt bei Situation: $M^2 > a^2$ passiert

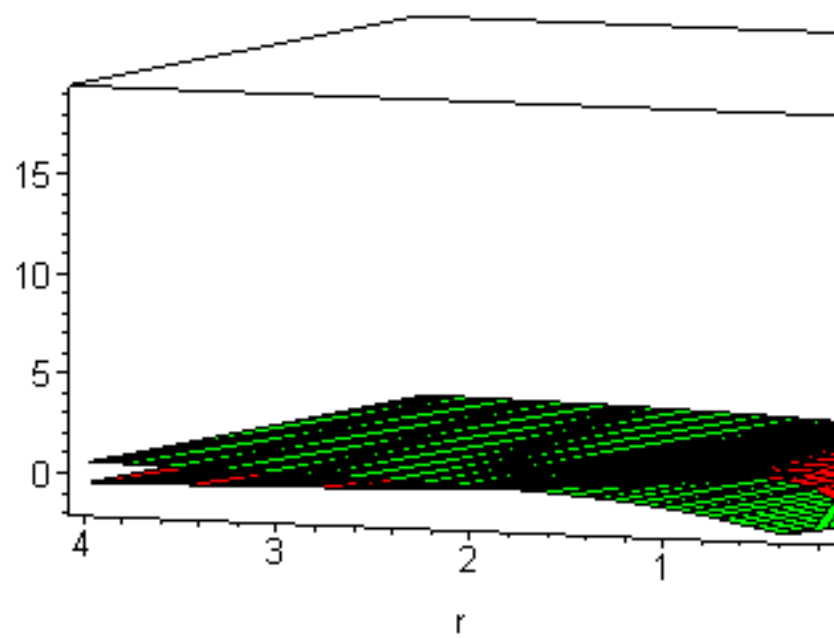
```
> plot3d(subs({M=1,a=1/2,P=0,Q=0},subs({Sigma=rhs(sub_1),Delta=rhs(sub_2)},get_compts(kn)[1,1])),r=0.1..4,theta=0..Pi,color=red):
```

```
plot3d(subs({M=1,a=1/2,P=0,Q=0,theta=2*Pi/3},subs({Sigma=rhs(sub_1),Delta=rhs(sub_2)},1/get_compts(kn)[2,2])),r=0.1..4,theta=0..Pi,color=green):
```

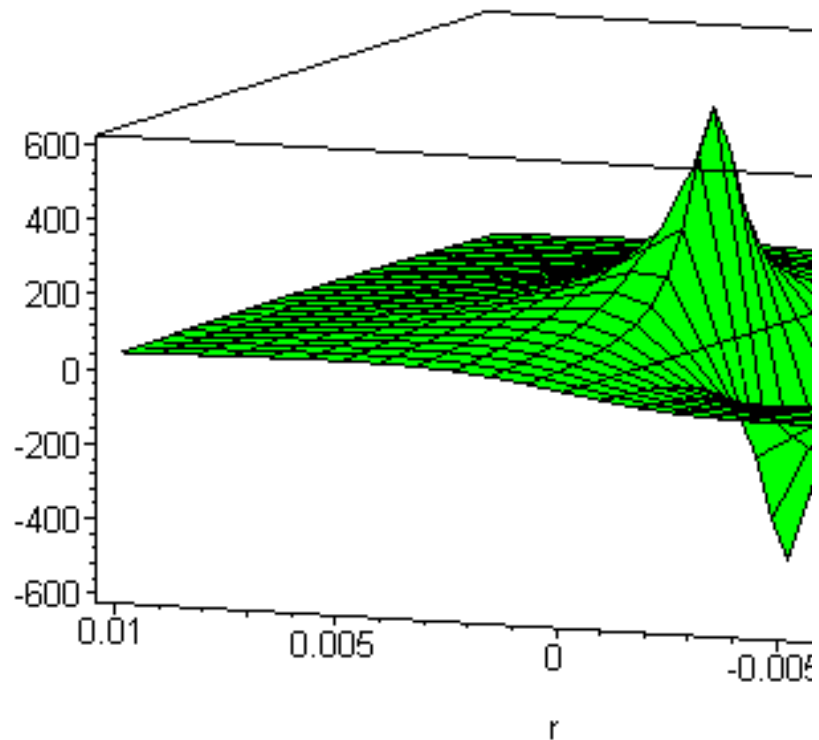
```
display(%,%,title=`Schwarzes Loch Kerr Typ mit normierter Masse = 1: Signaturen der ersten und zweiten Diagonal Elemente der Metrik`,axes=boxed);
```

```
plot3d(subs({M=1,a=1/2,P=0,Q=0},subs({Sigma=rhs(sub_1),Delta=rhs(sub_2)},get_compts(kn)[4,4])),r=-0.01..0.01,theta=Pi/2-0.01..Pi/2+0.01,color=green,title=`Schwarzes Loch Kerr Typ mit normierter Masse = 1: Die 4 Diagonal Elemente der Metrik in der Umgebung der Singularität`,axes=boxed);
```

Schwarzes Loch Kerr Typ mit normierter Masse = 1: Signaturen der erst



Schwarzes Loch Kerr Typ mit normierter Masse = 1: Die 4 Diagonal



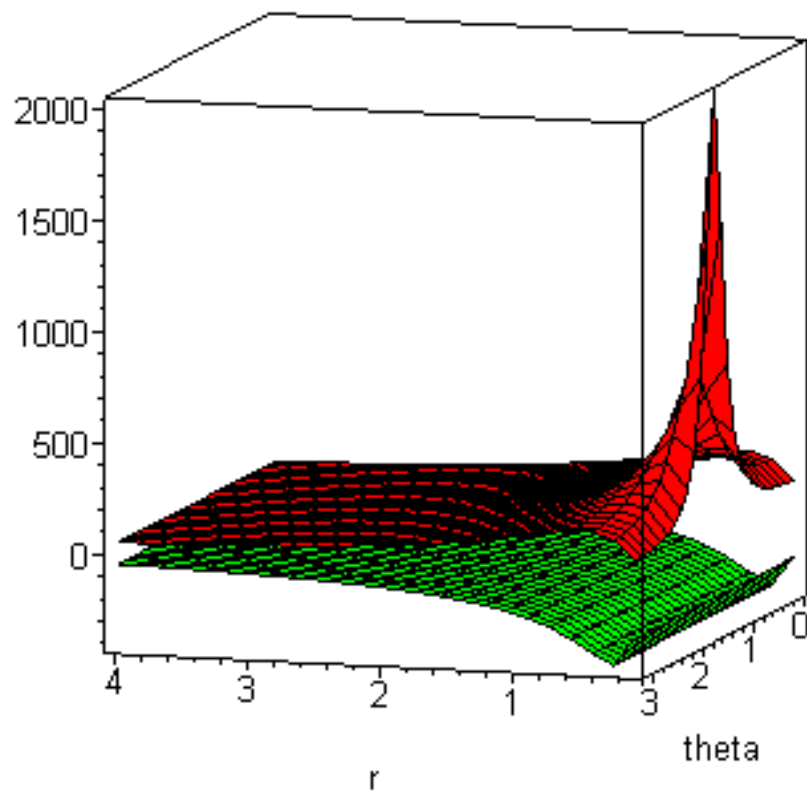
```
> plot3d(subs({M=1e2,a=1/2,P=0,Q=0},subs({Sigma=rhs(sub_
1),Delta=rhs(sub_2)}),get_compts(kn)[1,1])),r=
0.1..4,theta=0..Pi,color=red):
```

```
plot3d(subs({M=1e2,a=1/2,P=0,Q=0,theta=2*Pi/3},subs
({Sigma=rhs(sub_1),Delta=rhs(sub_2)}),1/get_compts(kn)
[2,2])),r=0.1..4,theta=0..Pi,color=green):
```

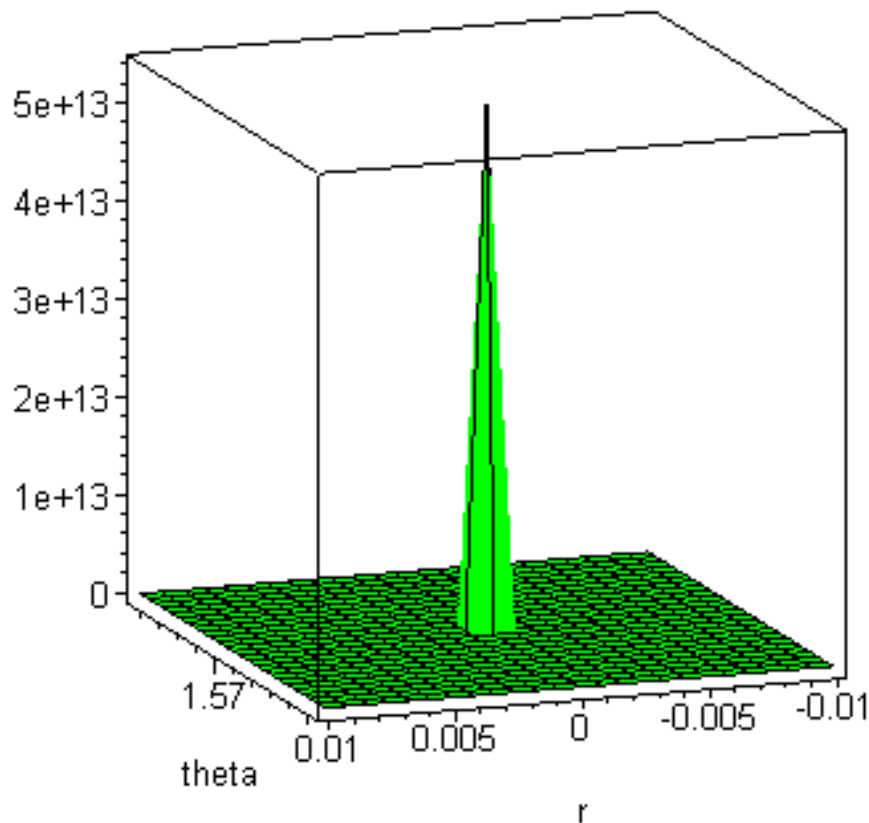
```
display(%,% ,title=`Schwarzes Loch Kerr Typ mit
normierter Masse=100: Signaturen der ersten und zweiten
Diagonal Elemente der Metrik`,axes=boxed);
```

```
plot3d(subs({M=1e2,a=1/2,P=0,Q=0},subs({Sigma=rhs(sub_
1),Delta=rhs(sub_2)}),get_compts(kn)[4,4])),r=-
0.01..0.01,theta=Pi/2-0.01..Pi/2+
0.01,color=green,title=`Schwarzes Loch Kerr Typ mit
normierter Masse = 100: Die 4 Diagonal Elemente der
Metrik in der Umgebung der Singularität`,axes=boxed);
```

Schwarzes Loch Kerr Typ mit normierter Masse=100: Signaturen der erst



Schwarzes Loch Kerr Typ mit normierter Masse = 100: Die 4 Diagonal El



Man erkennt, daß bei Annäherung an $r=0$ auf der Linie, welche zu $\theta = \frac{\pi}{2}$ unterschiedlich ist -das korrespondiert mit den normalen Ansätzen der diagonalen Elementen der Metrik-: der Beobachter kreuzt bei $r=0$ ohne jedoch mit der Singularität in Berührung zu kommen. Der Beobachter "mogelt" sich so an dieser Singularität vorbei. Das wird im ersten Bild verdeutlicht. Im zweiten Bild sehen wir den Wechsel von $g_{3,3}$ -Ansatz für $r>0$. Zu ϕ : das ist eine zeitähnliche Koordinate, jedoch hat sie eine kreisförmige Eigenschaft und deshalb finden wir uns hier in einer

Welt mit "geschlossener" Zeit wieder. Nähern wir uns $r=0$ auf der Linie $\theta = \frac{\pi}{2}$ so verursachen wir einen Wechsel der Metrik $g_{0,0}$. Damit finden wir eine wirkliche Singularität in dieser Richtung. Das zeigt, wie kompliziert die Sache mit der Kerr Metrik von rotierenden Schwarzen Löchern ist!!!

Mit etwas mehr Präzision erhalten wir folgende Ergebnisse:

$M^2 < a^2$. Es existiert kein Ereignishorizont, da r_p und r_n komplex sind, jedoch bleibt die Singularität bei $r=0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Damit die Koordinaten Singularität bei $\theta = 0$ weggelassen werden kann, müssen wir die Kerr-Schild Koordinaten mit linearen Elementen einführen.

Literatur:

<http://www.iop.org/EJ/abstract/0264-9381/8/9/006/>
<http://www.conicyt.cl/bases/fondecyt/proyectos/01/2000/1000961.html>
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:gr-qc/0109085>
<http://www.aei-potsdam.mpg.de/~koppitz/proceedings/koppitz/img3.htm>

```
> macro(ts=`t*`):
ks_le := d(s)^2 = -d(ts)^2 + d(x)^2 + d(y)^2 + d(z)^2 +
(2*M*r^3/(r^4+a^2*z^2))*((r*(x*d(x)+y*d(y))-a*(x*d(y)-
y*d(x)))/(r^2+a^2)+z*d(z)/r+d(ts))^2;
x + I*y = (r + I*a)*sin(theta)*exp(I*(Int(1,phi)+Int
(a/Delta,r)));
z = r*cos(theta);
ts = Int(1,t) + Int((r^2+a^2/Delta),r) - r;
ks_le := d(s)^2 = -d(t*)^2 + d(x)^2 + d(y)^2 + d(z)^2
+ \frac{2 M r^3 \left( \frac{r (x d(x) + y d(y)) - a (x d(y) - y d(x))}{r^2 + a^2} + \frac{z d(z)}{r} + d(t^*) \right)^2}{r^4 + a^2 z^2}
```

$$x + y I = (r + a I) \sin(\theta) e^{\left(\int 1 d\phi + \int \frac{a}{\Delta} dr \right) I}$$

$$z = r \cos(\theta)$$

$$t^* = \int 1 dt + \int r^2 + \frac{a^2}{\Delta} dr - r$$

Diese werden mit Hilfe der Minkowski Metrik vermindert bei $M \rightarrow 0$.

Literatur

[http://de.wikipedia.org/wiki/Metrik_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Metrik_(Mathematik))
<http://www.calsky.com/lexikon/de/txt/m/mi/minkowski.php>
<http://www.tu-harburg.de/rzt/rzt/it/Klassik/node3.html>

```
> int(subs( {P=0,Q=0},subs(Delta=rhs(sub_2),a/Delta) ),r):
x+I*y=(r+I*a)*sin(theta)*exp(I*(phi+%));
```

$$x + y I = (r + a I) \sin(\theta) e^{i \left(\phi + \frac{a \arctan\left(\frac{2r-2M}{2\sqrt{a^2-M^2}}\right)}{\sqrt{a^2-M^2}} \right)}$$

1) Ist $r=0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ dann wird die Singularität im Ring $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.
sein

2) $M^2 > a^2$. wie bei 1) werden wir eine **Ringsingularität** haben, jedoch mit 2 **Ereignishorizonten** r_p und r_n .

Als **Beiwerk zur Kerr Metrik** werden wir auch noch eine **Koordinaten Singularität** vorfinden

```
> get_compts(kn)[1,1]=0;
subs( Delta=rhs( sub_2 ),numer( lhs(%) ) ):
solve( subs({Q=0,P=0},%) = 0,r );
```

$$-\frac{\Delta - a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma} = 0$$

$$M + \sqrt{M^2 - a^2 + a^2 \sin^2(\theta)}, M - \sqrt{M^2 - a^2 + a^2 \sin^2(\theta)}$$

>
>
>

Wir entnehmen der obigen Lösung eine Ellipsoidgestalt. Wird der Ellipsoid bei gekreuzt $r_I = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2(\theta)}$ wird eine Änderung des Vorzeichens der Metrik $g_{0,0}$ vonstatten gehen. So war es auch beim Schwarzschild Schwarzen Loch: dieser Umstand zeigte daß es keine statischen Koordinaten unterhalb dieser Oberfläche oder Begrenzungsfläche gibt.

Diese Ober- oder Begrenzungsfläche wird Ergosphäre genannt. Das Gebiet zwischen den beiden Ereignishorizonten r_p und r_n wird Ergogebiet (Ergoregion) genannt.

Das Nichtvorhandensein der Singularität bei $r_{r,r}$ deutet ein nicht-statisches Verhalten an, das von einem Beobachter auf Grund der Rotation des Schwarzen Lochs wahrgenommen wird, aber nicht während des Falls in die Singularität; im Falle eines Beobachters unterhalb des Ereignishorizonts im Schwarzschild Schwarzen Loch.

Kleine Zusammenfassung

Ich habe vorgestellt, wie komplex das Geschehen der Sternentwicklung ist: vom

Brennschluss und was dann passiert bis zu verschiedenartigen Zuständen Schwarzer Löcher. Die MAPLE Routinen sind astrophysikalischer Standard. Sie spielen hier lediglich die Rolle des Demonstrators. Viel wichtiger soll die Erkenntnis sein, daß Diskussionen auf Verbalebene -ich sage dazu immer: Verbalinjurien- ganz schnell zu eklatanten Fehlaussagen oder völlig falscher Interpretation führen können. Es ist so wichtig, in diesem schwierigen Umfeld die richtige Interpretation zu finden und sicherlich wird auch an diesen hier gezeigten Standardtheorien noch sehr viel gefeilt werden. Das alles muß mit Beobachtungen unterfüttert und durch Beobachtungen quasi "beglaubigt" werden. Deshalb wurde beispielsweise das Weltraumteleskop gebaut oder die komplexe Spiegelanordnung auf Palo Alto.