Sei eine Hutverteilung definiert als Abbildung

$$f:\ \mathbb{N}\ \to\ \{0,1\}^{|\mathbb{N}|}$$

die jedem Sünder $n\in\mathbb{N}$ die Hutfarbe $f(n)$ zuordnet. Sei $F=\{f(n)\}$ die Menge der möglichen Hutverteilungen.

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation, gemäß derer zwei Hutverteilungen dann äquivalent sind, wenn sie sich an höchstens endlich vielen Stellen unterscheiden

$$f_1\sim f_2\ \iff\ \|\, f_1,f_2\,\| = \sum_n |f_1(n)-f_2(n)|\ <\ \infty$$

Seien

$$[f]\ =\ \{g\in F:\ g\sim f\}$$

$$F/\!\sim\ =\ \{[f]:\ f\in F\}$$

die Äquivalenzklassen sowie die Quotientenmenge von F bzgl. $\sim$, d.h. die Menge aller Äquivalenzklassen.

Aus dem Auswahlaxioms $\mathbf{C}$ folgt die Existenz einer bijektiven Funktion $\mathbf{c}:\ F/\!\sim\ \to\ F$ mit

$$\mathbf{C}\ \implies\ \exists\,\mathbf{c}:\ \mathbf{c}[f_1]\ =\ \mathbf{c}[f_2]\ \iff\ f_1\sim f_2$$

die aus jeder Äquivalenzklasse $[f]$ genau einen Repräsentanten auswählt.

Zu zeigen ist, dass eine generische Gewinnstrategie

$$\mathbf{s}:\ \mathbb{N}\times F\ \to\ \{0,1\}^{|\mathbb{N}|}$$

existiert, so dass für jede gegebene Hutverteilung f nur endliche viele Farben falsch geraten werden:

$$\exists\,\mathbf{s}:\ \forall f\in F:\|\,\mathbf{s}(n),f(n)\,\| <\ \infty$$

Zum Beweis betrachtet man zunächst die eindeutige Projektion $\pi:\ F\ \to\ F/\!\sim$

$$\pi(f)\ =\ [f]$$

einer Hutverteilung auf die Äquivalenzklasse, die Auswahlfunktion $\mathbf{c}:\ F/\!\sim\ \to\ F$ sowie die Verkettung $\mathbf{c}\circ\pi:\ F\ \to\ F$

$$\mathbf{s}\ =\ \mathbf{c}[f]\ =\ (\mathbf{c}\circ\pi)(f)\ \sim\ f$$

Die Strategie $\mathbf{s}$ leistet das Gewünschte, da sich die von ihr gelieferte Hutverteilung $\mathbf{s}(n)$ nur an endlich vielen Stellen von der tatsächlich vorliegenden $f(n)$ unterscheidet.

Im Zuge des Ratens ist jedoch f selbst nicht bekannt, sondern lediglich je Sünder n die auf $\mathbb{N}\setminus\{n\}$ beschränkte Hutverteilung $f|_{\neq n}$. Allerdings liefert diese aufgrund der Äquivalenz

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ f|_{\neq n}\sim f\ \implies\ \pi(f|_{\neq n})\ =\ \pi(f)\ =\ [f]$$

die selbe Äquivalenzklasse und daher

$$\forall f\in F,\forall n\in\mathbb{N}:\ \exists\,\mathbf{s}\ =\ \mathbf{c}[f]\ =\ (\mathbf{c}\circ\pi)(f|_{\neq n})\ \sim\ f \qquad \blacksquare$$