

# Relativistische Astrophysik

## Einführung

## Inhalt:

### **Relativistische Himmelsmechanik im schwachen Gravitationsfeld**

- Einleitung
- Schwarzschild Metrik
- Bewegungsgleichungen
- Lichtablenkung
- Planetarische Periheldrehungen
- Zusammenfassung

### **Teil1: Relativistische Betrachtung von Sternen und Schwarzen Löchern**

- Einleitung
- Geometrische Einheiten
- Relativistischer Stern
- Stern- und Gravitationskollaps
- Schwarzes Loch
  - Schwarzschild Typ
  - Reisner-Nordstrom Typ (geladense SL)
  - Kerr Typ (rotierendes SL)
- Zusammenfassung

### **Teil2: Kosmologische Modelle**

- Einleitung
- Robertson-Walker Metrik
- Standard Modelle
  - Einstein statisch
  - Einstein-de Sitter
  - de Sitter und anti-de Sitter
  - Geschlossenes Friedmann-Lemaitre
  - Offenes Friedmann-Lemaitre
  - Expandierendes sphärisches und rück-kollabierendes Universum
  - "Rüpckfederndes Modell
  - unser Universum (?)
- Wie alles begann
  - Bianchi Modelle und Mixmaster Universum
  - Inflation

Etwas zum Hintergrund aus der Geschichte:

[http://www.tu-harburg.de/rzt/rzt/it/Krit\\_Physik/node4.html](http://www.tu-harburg.de/rzt/rzt/it/Krit_Physik/node4.html)

[http://www.tc.umn.edu/~janss011/pdf\\_files/knot.pdf](http://www.tc.umn.edu/~janss011/pdf_files/knot.pdf)

### **Relativistische Himmelsmechanik im schwachen Gravitationsfeld**

#### *Einleitung*

Erste Ergebnisse in der Gravitation Theorie wurden ohne die genaue Kenntnis der Feldgleichungen sowie Einsteins Raumzeit Geometrie erzielt. Die Idee war das Äquivalenz Prinzip der Gleichheit der trägen und der schweren Masse. Zu nennen ist hier die Galilei Transformation. Der erste Teil dieses MAPLE files wird zeigen, daß die sich ergebenden natürlichen Konsequenzen die Schwarzschild Metrik und die grundlegenden experimentell gefundenen Effekte der Theorie von Körpern in schwachen Gravitationsfeldern sind. Das sind: Präzessionen im Orbit und Lichtablenkung

[ aus: *Sommerfeld A. Lectures on theoretical physics, v. 3, Academic Press, NY, 313-315 (1952)*].

### **Schwarzschild Metrik**

Wir nehmen ein zentralsymmetrisches Gravitationsfeld (Zentralmasse) an. Diese besitzt eine Masse M. Ein Probekörper K fällt entlang der x-Achse dieser Zentralmasse. In Übereinstimmung mit dem Äquivalenzprinzip wird die gleichförmige bewegung lokal kompensiert durch die Gravitationskraft, da keine Gravitationskraft im freifallenden System  $K_\infty$  angenommen wird. Dies folgt aus der Lorentz Metrik mit einem linearen Element, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist:

$$ds^2 = dx_\infty^2 + dy_\infty^2 + dz_\infty^2 - c^2 dt_\infty^2$$

Die Geschwindigkeit v und die radiale Komponente r werden im sphärischen System K gemessen. Dies System ist an die zentrale Masse gekoppelt. Ein Beobachter in diesem bewegungslosen System erfährt die Gravitationskraft. Bewegt sich das erste System relativ zu einem zweiten System ergeben sich die folgenden Beziehungen der Systemkoordinaten:

$$dx_\infty = \frac{dr}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \left( \beta = \frac{v}{c} \right)$$

$$dt_\infty = \sqrt{1-\beta^2} dt$$

$$dy_\infty = r d\theta$$

$$dz_\infty = r \sin(\theta) d\phi$$

Die erste und zweite Beziehung ergeben sich aus der Lorentz Kraft und der Zeitdilatation im bewegtem System. Theta ist der Ablenkungswinkel.  $K_\infty$  ergibt sich aus K und die Metrik schaut folgendermaßen aus:

$$ds^2 = (1-\beta^2)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) - c^2 (1-\beta^2) dt^2$$

Der Sinn dieses zusätzlichen Terms in der Metrik ist eine Verbindung zum Gravitationsfeld zu schaffen. Ausdrücklich sei gesagt, daß hier keinerlei Postulat

bezüglich String- oder anderer weiterführenden Theorien abzuleiten ist.

Viele Grundlagen aus:

<http://www.lsw.uni-heidelberg.de/>

[http://www.pupress.princeton.edu/chapters/s2\\_5635.pdf](http://www.pupress.princeton.edu/chapters/s2_5635.pdf)

<http://www.du.edu/~jcalvert/phys/orbits.htm>

[http://de.wikipedia.org/wiki/Allgemeine\\_Relativit%C3%A4tstheorie#Lichtablenkung](http://de.wikipedia.org/wiki/Allgemeine_Relativit%C3%A4tstheorie#Lichtablenkung)

<http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/gravitation/node85.html>

> **restart: with(plots):**

Warning, the name changecoords has been redefined

> **A:=(m - m0)\*c^2 - G\*M\*m/r=0;**

$$A := (m - m0) c^2 - \frac{G M m}{r} = 0$$

Energie-Erhaltungssatz unter der Annahme daß das Newton Gravitationsgesetz richtig ist, zumindest in der ersten Näherung. Es sei angemerkt, daß hier eine kleine Unkorrektheit oft "den Fall" vereinfacht:  $E = m c^2$  richtig muß dies lauten:  $\Delta m c^2$  oder  $(m - m_0)c^2$ , denn nur die verloren gegangene oder auch "zerstrahlte" Masse "verwandelt" sich in Energie. In obiger Energiegleichung habe ich das berücksichtigt. In  $\beta^2$  versteckt sich  $v^2 / c^2$

Das erhält man auch, wenn man die Metrik über Polarkoordinaten schreibt :  $r \cos(\omega t)$ ;  $r \sin(\omega t) z$ ;  $ct$ , dann diesen Vektor differenziert:

$-r \omega \sin(\omega t) dt$ ;  $r \omega \cos(\omega t) z$ ;  $c dt$  Der nennt sich auch

**Verschiebungsvektor** Bildung des Skalarprodukts heißt Multiplikation des Verschiebungsvektors mit sich selber ergibt:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + c^2 dt^2 = r^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) dt^2 + r^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) dt^2 + 0 + c^2 dt^2$$

Die Fleißigen unter Euch rechnen das selber und erhalten dann:

$$= (r \omega^2 - c^2/r) dt^2$$

mit  $r \omega^2$  als Kreisbeschleunigung

Im abgeschlossenen System ist die Summe aller Kräfte konstant oder Null.

Also muß entweder  $r \omega^2$  oder  $c^2/r$  negativ sein!!

Das bedeutet:  $-(r \omega^2 + c^2/r) dt^2$

oder

$$(1 - r^2 \omega^2 / c^2) c^2 dt^2$$

Wieder dürft ihr rechnen...Hilfestellung:  $-dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2 = ds^2$   $s$  ist das Linienelement. Es wird vereinfacht:  $\omega^2 r^2 = v^2$

Dann folgt:

$$dt^2 = ds^2 / c^2 * 1 / (1 - v^2 / c^2)$$

und mit  $ds^2 / dt^2 = d\tau^2$  folgt

$$dt^2 = d\tau^2 / (1 - v^2 / c^2)$$

oder:

$$dt = d\tau * 1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

Statt dem Produkt Winkelgeschwindigkeit mit Zeit kann auch vereinfacht die Phase

angeschrieben werden.

2 "Doktorfragen":

- was bedeutet das, wenn wir mit einer Phase rechnen?
- und wie sieht es mit der Deutung in der komplexen Ebene aus???

G ist die Gravitationskonstante

Verwendete Ephemeriden:

<http://www.solarviews.com/germ/data1.htm> sowie [.../data2.htm](http://www.solarviews.com/germ/data2.htm)

Jetzt wird zur Gesamtmasse hin normiert. Die Wurzel beschreibt den relativistischen Teil mit beta.  $1 - \beta^2$  wird in Folge substituiert mit einem Term alpha, der Radius abhängig ist.

```
> A/(m*c^2):  
  hlp:=subs(m=m0/sqrt(1-beta^2),%):  
  hlp1:=expand(hlp);  
  hlp2:=solve(hlp1,sqrt(1-beta^2)):  
  hlp3:=sqrt(1-beta^2)=expand(hlp2);  
  1-beta^2=taylor((1-subst(op(2,hlp3)=alpha/r,rhs  
(hlp3)))^2,alpha=0,2);
```

$$hlp1 := 1 - \sqrt{1 - \beta^2} - \frac{GM}{c^2 r} = 0$$

$$hlp3 := \sqrt{1 - \beta^2} = 1 - \frac{GM}{c^2 r}$$

$$1 - \beta^2 = 1 - \frac{2}{r} \alpha + O(\alpha^2)$$

Der letzte Term ist auch so zu schreiben::

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2\alpha}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2) - c^2 \left(1 - \frac{2\alpha}{r}\right) dt^2$$

Dieses lineare Element beschreibt die Schwarzschild Metrik

alpha = GM/c^2 es wird die erste Approximation von alpha verwendet; wir nutzen die Taylor Entwicklung:

```
> tay:=taylor(d(r)^2/(1-2*alpha/r)+r^2*(d(theta)^2+sin  
(theta)^2*d(phi)^2)-c^2*(1-2*alpha/r)*d(t)^2, alpha=0, 2  
):  
  tay_ply:=convert(tay, polynom):  
  metric := d(s)^2 = collect(tay_ply, {d(r)^2, d(t)^2}  
);
```

$$metric := d(s)^2 = \left(1 + \frac{2\alpha}{r}\right) d(r)^2 + \left(-c^2 + \frac{2c^2\alpha}{r}\right) dt^2 + r^2 (d\theta)^2 + \sin(\theta)^2 d(\phi)^2$$

### Bewegungsgleichungen

Wir nehmen eine in Bewegung befindliche kleine Masse im Newton Gravitations

Potential  $\Phi = -\frac{GM}{r}$  an. Der Bezugspunkt ist der Radius  $r$ . Die Lagrange Darstellung dieser Bewegung im zentralsymmetrischen Feld ergibt sich zu:

>  $L := (\text{diff}(r(t), t)^2 + r(t)^2 * \text{diff}(\theta(t), t)^2) / 2 + GM / r(t);$

$$L := \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} r(t) \right)^2 + \frac{1}{2} r(t)^2 \left( \frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 + \frac{GM}{r(t)}$$

Der Übergang zur Schwarzschild Metrik transformiert die Zeit und die Radial Differentialiale der Koordinaten. Siehe beispielsweise in:

[Kai-Chia Cheng. *A simple calculation of the perihelion Mercury from the principle of equivalence. Nature (Lond.), v. 155, 574 (1945); N.T. Roseveare, Mercury's perihelion from Le Verrier to Einstein, Clarendon Press - Oxford, 1982*]:

$$dr \rightarrow \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)^{(-1)} dr \text{ und } dt \rightarrow dt$$

(Anmerkung: Diese Substitution wird nur für Differentiale, nicht für Koordinaten durchgeführt. Wir benutzen die Näherungen des mittleren Fehlerquadrats für das schwache Gravitationsfeld. Das ist die modifizierte Lagrange Gleichung:  $\gamma(r) = 1 + \alpha / r(t)$ )

>  $L\_n := \text{collect}(\text{expand}(\text{subs}(\{\text{diff}(r(t), t) = \gamma(r(t))^{(-1)} * \text{diff}(r(t), t), \text{diff}(\theta(t), t) = \gamma(r(t)) * \text{diff}(\theta(t), t)\}, L)), \{\text{diff}(r(t), t)^2, \text{diff}(\theta(t), t)^2\});$

$$L\_n := \frac{1}{2} \gamma(r(t))^4 \left( \frac{d}{dt} r(t) \right)^2 + \frac{1}{2} r(t)^2 \gamma(r(t))^2 \left( \frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 + \frac{GM}{r(t)}$$

Nächster Schritt: Die Bewegungsgleichung aus der Lagrange Beziehung zu erhalten ist die Berechnung der Kraft

$$\frac{\partial}{\partial x} L(x, y) \quad \text{sowie des Moments} \quad \frac{\partial}{\partial y} L(x, y), \quad \text{wobei } y = \frac{\partial}{\partial t} x \text{ ist:}$$

eq1: Erste Kraftkomponente    eq2: Erste Moment Komponente  
eq3: Zweite Kraft Komponente    eq4: Zweite Moment Komponente

>  $eq1 := \text{Diff}(\text{Lagrangian}(r, \text{Diff}(r, t)), r) = \text{diff}(\text{subs}(r$

```
(t) = r, L_n), r);
eq2 := Diff(Lagrangian(r, Diff(r,t)), Diff(r,t)) = subs(
x=diff(r(t),t), diff(subs(diff(r(t),t)=x, L_n), x));
eq3 := Diff(Lagrangian(theta, Diff(theta,t)), theta) =
diff(subs(theta(t) = theta, L_n), theta);
eq4 := Diff(Lagrangian(theta, Diff(theta,t)), Diff
(theta,t)) = subs(y=diff(theta(t),t), diff(subs(diff
(theta(t),t)=y, L_n), y));
```

$$eq1 := \frac{\partial}{\partial r} \text{Lagrangian}\left(r, \frac{\partial}{\partial t} r\right) =$$

$$2 \gamma(r)^3 \left(\frac{\partial}{\partial t} r\right)^2 \left(\frac{d}{dr} \gamma(r)\right) + r \gamma(r)^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t)\right)^2 + r^2 \gamma(r) \left(\frac{d}{dt} \theta(t)\right)^2 \left(\frac{d}{dr} \gamma(r)\right) - \frac{G l}{r^2}$$

$$eq2 := \text{Diff}\left(\text{Lagrangian}\left(r, \frac{\partial}{\partial t} r\right), \frac{\partial}{\partial t} r\right) = \gamma(r(t))^4 \left(\frac{d}{dt} r(t)\right)$$

$$eq3 := \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Lagrangian}\left(\theta, \frac{\partial}{\partial t} \theta\right) = 0$$

$$eq4 := \text{Diff}\left(\text{Lagrangian}\left(\theta, \frac{\partial}{\partial t} \theta\right), \frac{\partial}{\partial t} \theta\right) = r(t)^2 \gamma(r(t))^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t)\right)$$

Diese Bewegungsgleichungen sind die Euler-Lagrange Gleichungen  $\frac{\partial^2}{\partial t \partial y} L(x, y)$   
 $-\frac{\partial}{\partial x} L(x, y) = 0$

Diese entsprechen dem 2. Newton Gesetz und ergeben sich aus dem Gesetz Actio = Reactio. In Winkel Koordinaten der Phasen ergeben sich die folgenden Beziehungen. Während eq3 = 0 ( die gemischten Ableitungen sind 0 ..siehe oben) , folgt aus eq4 die Bewegungsgleichung

$\frac{\partial^2}{\partial t \partial y_2} L(r, \theta, y_1, y_2) - \frac{\partial}{\partial \theta} L(r, \theta, y_1, y_2) = 0$  ( $y_1 = \frac{\partial}{\partial t} r$  ,  $y_2 = \frac{\partial}{\partial t} \theta$  ) in the Form:

rhs: right hand side = rechte Seite der Gleichung eq4:

> **Eu\_Lagr\_1 := Diff(rhs(eq4), t) = 0;**

$$Eu\_Lagr\_1 := \frac{d}{dt} \left( r(t)^2 \gamma(r(t))^2 \left( \frac{d}{dt} \theta(t) \right) \right) = 0$$

Damit ist  $r(t)^2 \gamma(r(t))^2 \left( \frac{d}{dt} \theta(t) \right) = H = const \dots$  ich sagte ja oben: r ist der Bezugspunkt

$u = 1/r$  ist die neue Variable.

```
> loes_1 := Diff(theta(t),t) = solve( gamma^2*diff(theta(t),t)/u(theta)^2 = H, diff(theta(t),t) );
```

$$loes_1 := \frac{d}{dt} \theta(t) = \frac{H u(\theta)^2}{\gamma^2}$$

Es wird substituiert:  $u = \frac{1}{r}$  und man erhält:

Damit wird die Variable geändert:  $r = 1/u(t)$  in  $r = 1/u(\theta)$  und dann müssen wir natürlich auch  $\theta$  nach  $t$  ableiten: 2. Reihe loes\_2 ist das Ergebnis dieser Substitution der oben erhaltenen Euler-Lagrange Gleichungen

```
> Diff(r(t), t) = diff(1/u(t),t);
hlp1:=Diff(r(t), t) = diff(1/u(theta),theta)*diff(theta(t),t);
loes_2 := Diff(r(t), t) = subs(diff(theta(t),t) = rhs(loes_1), rhs(hlp1));
```

$$\frac{d}{dt} r(t) = - \frac{\frac{d}{dt} u(t)}{u(t)^2}$$

$$hlp1 := \frac{d}{dt} r(t) = - \frac{\left( \frac{d}{d\theta} u(\theta) \right) \left( \frac{d}{dt} \theta(t) \right)}{u(\theta)^2}$$

$$loes_2 := \frac{d}{dt} r(t) = - \frac{\left( \frac{d}{d\theta} u(\theta) \right) H}{\gamma^2}$$

Das letzte Ergebnis wird für die Umrechnung mit der 2.Euler-Lagrange Gleichung verwendet

$\frac{\partial^2}{\partial t \partial y_1} L(r, \theta, y_1, y_2) - \frac{\partial}{\partial r} L(r, \theta, y_1, y_2) = 0$ . Die rechte Seite ergibt die Lösung von eq2:

```
> Diff( subs( {diff(r(t),t)=rhs(loes_2),gamma(r(t))=gamma}, rhs(eq2)), t );
```

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\gamma^2 \left( \frac{d}{d\theta} u(\theta) \right) H \right)$$

nun kann der Ausdruck umgeschrieben werden:

hlp: vom Ausdruck der ersten Zeile wird gamma sowie die Ableitung des Produkts berechnet:

first\_term: Dies ist der erste Teil des Ausdrucks der zweiten Euler-Lagrange Gleichung

```
> hlp:=-2*gamma*H*diff(1+alpha/r(t),t)*diff(u(theta),theta) - H*gamma^2*diff(u(theta),theta$2)*diff(theta(t),t);
first_term := subs({r(t)=1/u(theta), diff(theta(t),t)=rhs(loes_1)},\
subs(diff(r(t),t) = rhs(loes_2),hlp));
```

$$hlp := \frac{2 \gamma H \alpha \left( \frac{d}{dt} r(t) \right) \left( \frac{d}{d\theta} u(\theta) \right)}{r(t)^2} - H \gamma^2 \left( \frac{d^2}{d\theta^2} u(\theta) \right) \left( \frac{d}{dt} \theta(t) \right)$$

$$first\_term := - \frac{2 H^2 \alpha u(\theta)^2 \left( \frac{d}{d\theta} u(\theta) \right)^2}{\gamma} - H^2 \left( \frac{d^2}{d\theta^2} u(\theta) \right) u(\theta)^2$$

eq1 wird:

Hier werden die Ergebnisse von d( r(t)/dt ), gamma(r) und die erste Bewegungsgleichung "loes\_1" genutzt. Wir erhalten dadurch den zweiten Term des Ausdrucks der zweiten Euler-Lagrange Gleichung

```
> hlp:=2*gamma(r)^3*diff(r(t),t)^2*diff(gamma(r),r) +
r*gamma(r)^2*diff(theta(t),t)^2 +
r^2*gamma(r)*diff(theta(t),t)^2*diff(gamma(r),r) - G*M/
(r^2);
hlp1:=subs({diff(r(t),t) = rhs(loes_2), diff(gamma(r),r)
= diff(1+alpha/r,r), diff(theta(t),t) = rhs(loes_
1)},hlp):
```

```
hlp2:=subs(gamma(r) = gamma, hlp1);
```

```
second_term := subs(r = 1/u(theta), hlp2);
```

$$hlp := 2 \gamma(r)^3 \left( \frac{d}{dt} r(t) \right)^2 \left( \frac{d}{dr} \gamma(r) \right) + r \gamma(r)^2 \left( \frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 + r^2 \gamma(r) \left( \frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 \left( \frac{d}{dr} \gamma(r) \right) - \frac{GM}{r^2}$$

$$hlp2 := -\frac{2\left(\frac{d}{d\theta} u(\theta)\right)^2 H^2 \alpha}{\gamma r^2} + \frac{r H^2 u(\theta)^4}{\gamma^2} - \frac{H^2 u(\theta)^4 \alpha}{\gamma^3} - \frac{G M}{r^2}$$

$$second\_term := -\frac{2 H^2 \alpha u(\theta)^2 \left(\frac{d}{d\theta} u(\theta)\right)^2}{\gamma} + \frac{u(\theta)^3 H^2}{\gamma^2} - \frac{H^2 u(\theta)^4 \alpha}{\gamma^3} - G M u(\theta)^2$$

Und schluss-endlich: Entwicklung nach Exponenten hin mit "expand"

```
> Eu_Lagr_2 := expand( simplify(first_term - second_term)/u(theta)^2/H^2);
```

$$Eu\_Lagr\_2 := -\left(\frac{d^2}{d\theta^2} u(\theta)\right) - \frac{u(\theta)}{\gamma^2} + \frac{u(\theta)^2 \alpha}{\gamma^3} + \frac{G M}{H^2}$$

Die 1. Approximationsstufe: Entwicklung bis zum linearen Term

```
> gamma^n = taylor((1+alpha*u)^n, alpha=0,2);
      \gamma^n = 1 + n u \alpha + O(\alpha^2)
```

So, damit haben wir die vereinfachte Grundgleichung der Gravitation:

In der folgenden Taylor Entwicklung zeigen sich 4 Terme:

1. Term: Beschreibung des Augenblickwinkels des Körpers auf seiner Bahn. Theta = 0: Perihel oder kürzester Abstand der Ellipsenbahn zum Gravitationssschwerpunkt.
2. Term: reziproke Abstandsabhängigkeit
3. Term: Bahnkomponente der Gravitationswirkung
4. Term: Einfluß der Relativität

```
> tay_1:=taylor( subs(gamma = 1+alpha*u(theta),Eu_Lagr_2), alpha=0,2 );
```

```
basic_equation := convert(tay_1, polynom) = 0;
```

$$basic\_equation := -\left(\frac{d^2}{d\theta^2} u(\theta)\right) - u(\theta) + \frac{G M}{H^2} + 3 u(\theta)^2 \alpha = 0$$

### Lichtbrechung

Diese Beschreibung der Gravitation wird für die Erklärung der Ablenkung eines Lichtstrahls in der Nachbarschaft eines Sterns verwendet. Diese Fundamentalbeziehung beruht auf der Anfangsbedingung des "Null geodätischen Linienelements"  $ds = 0$  (siehe meine Erklärungen ganz zu Anfang... Verschiebungsvektor! Diese Problemstellung wird jedoch in diesem Ansatz

vereinfacht und wir nehmen eine Trajektorie der Partikelbewegung aus der Unendlichkeit an. Damit darf man schreiben:  $H = \infty$ . Diese Grenzwertbetrachtung eliminiert den mittleren Term. Daran sollte stets gedacht werden: Licht kann als Welle und als Korpuskel beschrieben werden. Im Folgenden wird der Korpuskel Ansatz verwendet:

```
> eq_def := subs(G*M/(H^2)=0,basic_equation);
```

$$eq\_def := -\left(\frac{d^2}{d\theta^2} u(\theta)\right) - u(\theta) + 3 u(\theta)^2 \alpha = 0$$

Die freie Bewegung, was so viel bedeutet wie nicht-relativistische Lösung:  $\alpha = 0$   
Lösung des obigen Systems, wobei Theta vom Perihel aus gemessen oder gesehen wird. Dort gilt:  $r = R$

```
> lhs(eq_def);subs(alpha=0, lhs(eq_def));
```

$$-\left(\frac{d^2}{d\theta^2} u(\theta)\right) - u(\theta) + 3 u(\theta)^2 \alpha$$

$$-\left(\frac{d^2}{d\theta^2} u(\theta)\right) - u(\theta)$$

```
> hlp1:=subs(alpha=0, lhs(eq_def)) = 0;
```

```
loes := dsolve({hlp1, u(0) = 1/R, D(u)(0) = 0}, u(theta));
```

$$hlp1 := -\left(\frac{d^2}{d\theta^2} u(\theta)\right) - u(\theta) = 0$$

$$loes := u(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{R}$$

Darin ist:  $r = \frac{R}{\cos(\theta)}$ . Der letzte Ausdruck beschreibt den Lichtstrahl, welcher gerade (ohne Ablenkwinkel) passiert. Dieser Winkel ist natürlich  $\theta = 0$  und hier ist  $r=R$ . Wir setzen diese Loesung in den oben gefundenen Term: `eq_def` ein. Das ergibt für diesen Fall die korrekte Lösung des Gravitationsfelds. Es wird substituiert: `u(theta)` mit dem oben erhaltenen Ausdruck "loes" für den nicht relativistischen Fall:  $\alpha=0$

```
> hlp:=-op(1,lhs(eq_def)) - op(2,lhs(eq_def)) = subs(u(theta)=rhs(loes),op(3,lhs(eq_def)));
```

```
loes_1 := dsolve({hlp, u(0) = 1/R, D(u)(0) = 0}, u(theta));
```

$$hlp := \left( \frac{d^2}{d\theta^2} u(\theta) \right) + u(\theta) = \frac{3 \cos(\theta)^2 \alpha}{R^2}$$

$$loes_1 := u(\theta) = -\frac{(\alpha - R) \cos(\theta)}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{\alpha (-3 + \cos(2\theta))}{R^2}$$

Wir haben nun ein gewisses Verständnis für  $u(\theta)$ . Dieses  $u(\theta)$  beschreibt das beobachtete Lichtverhalten oder besser den Lichtweg. Der Winkel der Lichtablenkung  $2R/r$  ist natürlich symmetrisch: Ausfallswinkel = Einfallswinkel. Das gilt, wenn wir nur eine Trennschicht haben. Bei mehreren Trennschichten (verschiedene  $\epsilon_r$ ) bedingen eine wesentlich komplexere Lösung, die geschlossen (auch in MAPLE) nicht mehr erhältlich ist. Damit können wir wieder einmal eine kleine Vereinfachung machen:

```
> licht_ablenk_simple:=simplify( 2*subs({theta=Pi/2,
alpha=G*M/c^2},rhs(loes_1))*R );
```

$$licht\_ablenk\_simple := \frac{-2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) G M + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) R c^2 + 3 G M - G M \cos(\pi)}{R c^2}$$

Das ist für unsere Annahme der richtige Ausdruck für die Ablenkung des Lichts unter Masseneinfluß. Jetzt holen wir aus den Ephemeriden mal die Daten der Sonne und setzen diese hier ein: Der mit obiger Gleichung berechnete Winkel entspricht der Lichtablenkung am Rand der Erde bzw. Sonne in Winkelsekunden. Wir sehen, die Erde hat keine allzugroße Lichtablenkung, aber immerhin...

```
> licht_ablenk_erde_sec:=evalf(subs(G=6.6742e-11,M=
5.976e24,R=6378.14e3,c=3e8,licht_ablenk_simple)*360/(2
*Pi)*3600);
> licht_ablenk_sonne_sec:=evalf(subs(G=6.6742e-11,M=
1.989e30,R=695e6,c=3e8,licht_ablenk_simple)*360/(2*Pi)*
3600);
```

$$licht\_ablenk\_erde\_sec := 0.0005732688875$$

$$licht\_ablenk\_sonne\_sec := 1.751022837$$

### Perihel bewegung der Planeten

Kommen wir zurück zu unserer Grundgleichung "basic\_equation". Ohne relativistische Korrektur (OR) der Metrik ( $\alpha=0$ ) ergibt sich:

```
> basic_eq_0R:= dsolve({subs({G*M/(H^2)=k,alpha=
0},basic_equation),u(0)=1/R,D(u)(0)=0},u(theta));
```

$$basic\_eq\_0R := u(\theta) = -\frac{\cos(\theta) (k R - 1)}{R} + k$$

Diese Gleichung beschreibt eine elliptische Umlaufbahn

$$u = k(1 + e \cdot \cos(\theta)),$$

wobei  $e = \left(\frac{1}{kR} - 1\right)$  die Exzentrizität ist. Für unseren lieben Merkur gilt:  $k = 0.01$ ,  $e = 0.2056$ ,  $R = 83.3$

```
> eq:=1/(k*R)-1=0.2056;
> R_erg:=149.6e3;
> k_erg:=subs(R=R_erg,solve(eq,k));
```

$$eq := \frac{1}{kR} - 1 = 0.2056$$

$$R_{erg} := 149600.$$

$$k_{erg} := 0.5544535484 \cdot 10^{-5}$$

Maple läßt die direkte Eingliederung des Ergebnisses basic\_eq\_OR nicht zu (oder besser: ich weiß nicht, wie ich das hinbekomme!). Deshalb habe ich das Ergebnis "in die Maus" gnommen und hier als Zuweisung (hinter dem Pfeil) eingesetzt.

```
> K:= (theta, k, R) -> -(k*R-1)/R*cos(theta)+k ;
```

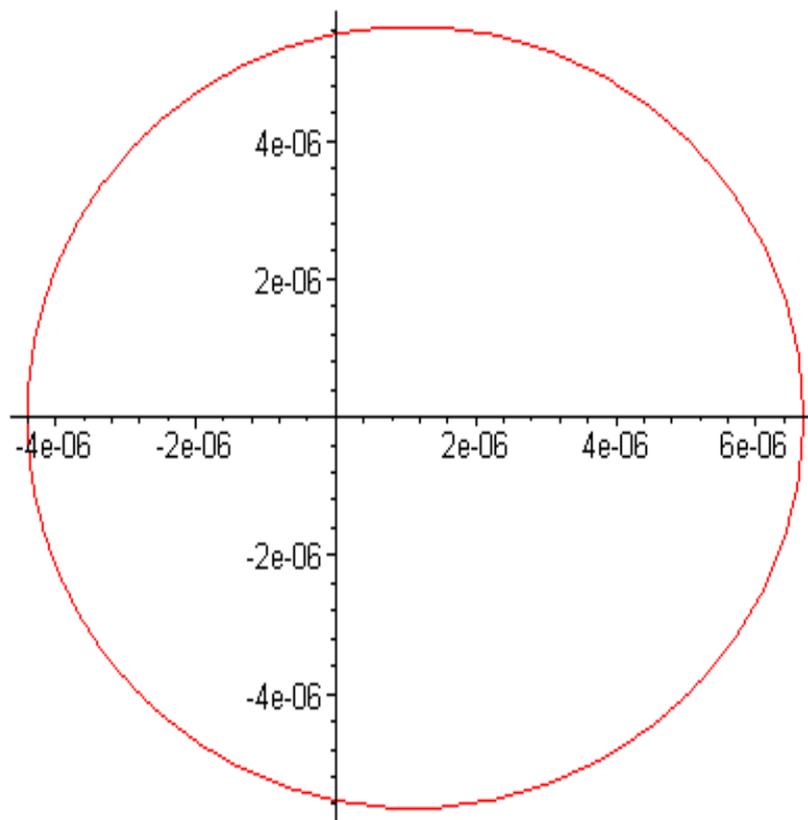
$$K := (\theta, k, R) \rightarrow -\frac{(kR - 1) \cos(\theta)}{R} + k$$

```
>
```

```
> S := theta -> K(theta, k_erg, R_erg );
polarplot([S,theta->theta,0..2*Pi],title=`Umlaufbahn des
Merkur ohne relativistische Komponente`);
```

$$S := \theta \rightarrow K(\theta, k_{erg}, R_{erg})$$

## Umlaufbahn des Merkur ohne relativistische Komponente



Wir holen uns wieder die Grundgleichung und substituieren (vereinfachen) selbige aber nun mit der relativistischen Komponente alpha:

```
> hlp:=subs({G*M/(H^2)=k, 3*u(theta)^2*alpha=3*alpha*(k*(1
+e*cos(theta)))^2}, basic_equation);
basic_eq_R:=dsolve({hlp, u(0)=1/R, D(u)(0)=0}, u(theta));
```

$$hlp := -\left(\frac{d^2}{d\theta^2} u(\theta)\right) - u(\theta) + k + 3 \alpha k^2 (1 + e \cos(\theta))^2 = 0$$

basic\_eq\_R:=u(theta)=

$$\frac{\cos(\theta) (R e^3 \alpha k^2 + R \alpha k^2 + 3 R \alpha k^2 e^2 + 3 R e \alpha k^2 + R k e - e)}{e R} - \frac{(k e^3 \alpha \cos(\theta) + k e^2 \alpha + k e \alpha + \alpha)}{e R}$$

Jetzt können wir ein schön Bildchen malen:

Ich höre bei 4.75Pi auf, damit man sieht, wie sich die Bahn dreht. Auch hier wurde die Lösung basic\_eq\_R "in die Maus" genommen und so eingefügt

>

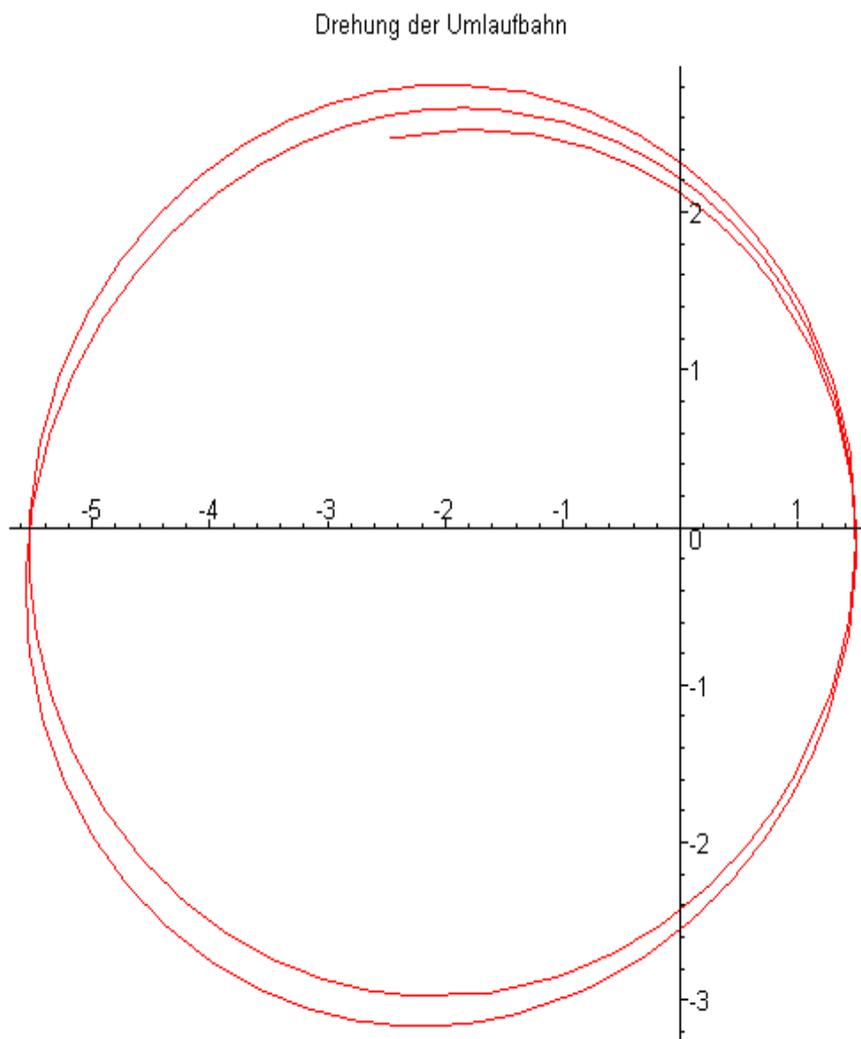
```
> K := (theta, k, R, alpha, e) -> 1 / (-cos(theta)*(R*e^3
*alpha*k^2+R*alpha*k^2+3*R*e^2*alpha*k^2+3*R*e*alpha*k^2
+R*e*k-e)/e/R+(-e^3*alpha*k^2*cos(theta)^2+3*(1/3+e^2)*k^2
*alpha*cos(theta)+3*sin(theta)*e^2*alpha*k^2*theta+2*e^3
```

```

*alpha*k^2+(3*alpha*k^2+k)*e)/e );
> S := theta -> K(theta, 0.42, 1.49, 0.01, 0.6):
> polarplot([S,theta->theta,0..4.75*Pi],title=`Drehung der
Umlaufbahn`);

```

$$K := (\theta, k, R, \alpha, e) \rightarrow 1 \left( \begin{aligned} & - \frac{\cos(\theta) (R e^3 \alpha k^2 + R \alpha k^2 + 3 R e^2 \alpha k^2 + 3 R e \alpha k^2 + R e k - e)}{e R} + \left( \right. \\ & - e^3 \alpha k^2 \cos(\theta)^2 + 3 \left( \frac{1}{3} + e^2 \right) k^2 \alpha \cos(\theta) + 3 \sin(\theta) e^2 \alpha k^2 \theta + 2 e^3 \alpha k^2 \\ & \left. + (3 \alpha k^2 + k) e \right) / e \end{aligned} \right)$$



> Jetzt wird der Bahndrehimpuls des Planeten berücksichtigt. Wir werden sehen, wie sich dieser auswirkt. Die Planetenrotation wird durch omega beschrieben:

$$\omega : u(\theta) = k(1 + e \cos(\theta - \omega \theta)).$$

Die Teillösung hlp ist die Näherung in Folge der Substitution  $GM/H^2=k$

Innerhalb der Schleife "for omega" werden wir den quadratischen Anteil nicht berücksichtigen, da er sehr klein ist.

loes\_min\_R wird über den minimal Abstand Planet-Sonne bestimmt.

loes\_max\_R wird durch die große Halbaxe der Ellipse bestimmt.

```
> hlp:=subs({G*M/(H^2)=k,u(theta)=k*(1+e*cos(theta-
omega*theta))},\
basic_equation):
hlp_1:=simplify(hlp):
hlp_2:=lhs(hlp_1):
hlp_3:=collect(hlp_2, cos(-theta+omega*theta)):
hlp_4:=coeff(hlp_3, cos(-theta+omega*theta)):#the
coefficient before this term gives algebraic equation for
omega
hlp_om_1:=subs(omega^2=0,hlp_4):
loes_hlp_om:=solve(hlp_om_1 = 0, omega):
loes_min_R:=subs({alpha = G*M/c^2, k = 1/R/(1+e)},2
*Pi*loes_hlp_om);
loes_max_R:=subs(R=a*(1-e),loes_min_R);
```

$$loes\_min\_R := \frac{6 \pi G M}{c^2 R (1 + e)}$$

$$loes\_max\_R := \frac{6 \pi G M}{c^2 a (1 - e) (1 + e)}$$

Über einen langen Zeitraum z.B. 50 oder 100 Jahr ergibt sich die Periheldrehung des Merkurs zu: Die Merkur sowie Erd Zeit-Perioden werden zueinander berücksichtigt:

```
> Jahre:=100: Zeit_quot:=365.26/87.97:
> hlp:=subs({kappa=0.74e-30,M=1.989e30,a=57.91e6,e=
0.2056},\
6*Pi*kappa*M/a/(1-e^2)*(Jahre*Zeit_quot)/4.848e-6):
per_dreh:=evalf(hlp);
per_dreh := 42.84266695
```

Die "basic\_equation" wird jetzt m Detail untersucht Das steht in: *J. L. Synge, Relativity: the general theory, Amsterdam (1960)*

Die impliziten Lösungen sind:

Kleine Anmerkung:

Ist eine DGL  $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ , so spricht man von einer **impliziten** Darstellung. Wird eine solche DGL zur höchstwertigsten Ableitung hin gelöst

niedergeschrieben, spricht man von der **expliziten** Darstellung

```
> hlp:=dsolve( subs(G*M/H^2=k, basic_equation), u(theta));
```

$$hlp := \int^{u(\theta)} \frac{1}{\sqrt{-C1 - a^2 + 2k_a + 2a^3 \alpha}} d_a - \theta - C2 = 0,$$

$$\int^{u(\theta)} -\frac{1}{\sqrt{-C1 - a^2 + 2k_a + 2a^3 \alpha}} d_a - \theta - C2 = 0$$

Die impliziten Lösungen der obigen Integralgleichung sind: beta ist die Integrationskonstante für die Anfangsbedingung

Es wird normiert: c=1 und G = 1

```
> loes_imp:=diff( u(theta), theta)^2 = 2*M*u(theta)^3 - u(theta)^2 + 2*u(theta)*M/H^2 + beta;
f := rhs(loes_imp);
f = 2*M*( u(theta) - u1 )*( u(theta) - u2 )*( u(theta) - u3 );
```

$$loes\_imp := \left( \frac{d}{d\theta} u(\theta) \right)^2 = 2 M u(\theta)^3 - u(\theta)^2 + \frac{2 u(\theta) M}{H^2} + \beta$$

$$f := 2 M u(\theta)^3 - u(\theta)^2 + \frac{2 u(\theta) M}{H^2} + \beta$$

$$2 M u(\theta)^3 - u(\theta)^2 + \frac{2 u(\theta) M}{H^2} + \beta = 2 M (u(\theta) - u1) (u(\theta) - u2) (u(\theta) - u3)$$

u1, u2, u3 sind die Wurzeln der kubischen Lösung. Diese beschreibt das Potential, welches die Orbitalbewegung verursacht.

```
> %;
```

$$2 M u(\theta)^3 - u(\theta)^2 + \frac{2 u(\theta) M}{H^2} + \beta = 2 M (u(\theta) - u1) (u(\theta) - u2) (u(\theta) - u3)$$

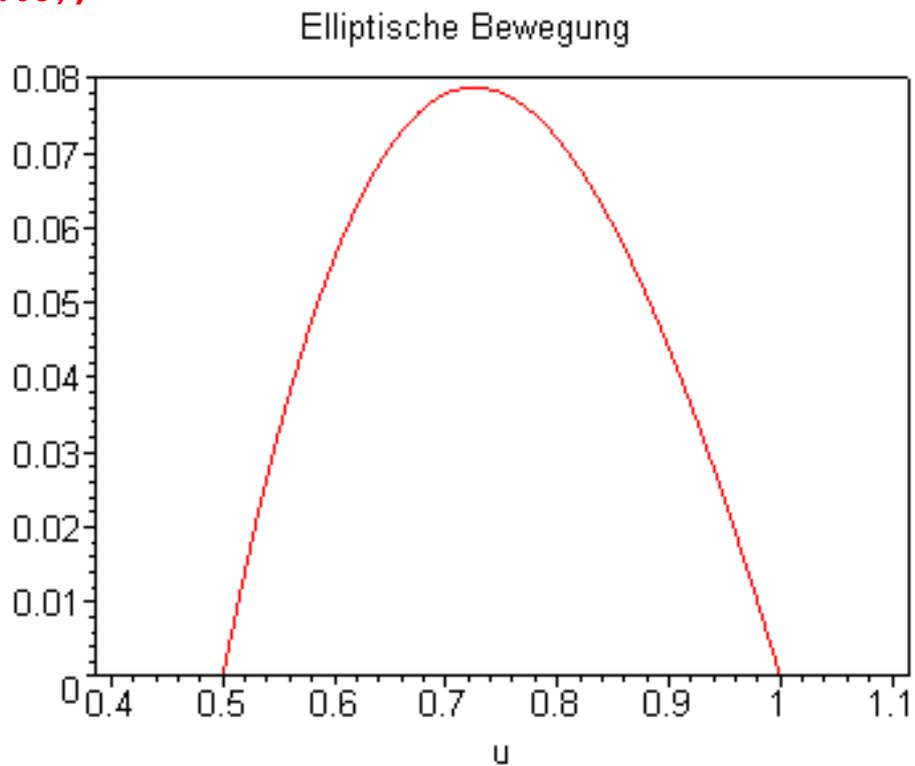
```
> loes_kub := rhs(%);
```

$$loes\_kub := 2 M (u(\theta) - u1) (u(\theta) - u2) (u(\theta) - u3)$$

Die Abhängigkeit dieser Funktion von u führt zu verschiedenen Bewegungstypen. Die

begrenzende Bewegung entspricht der des elliptischen Umlaufs

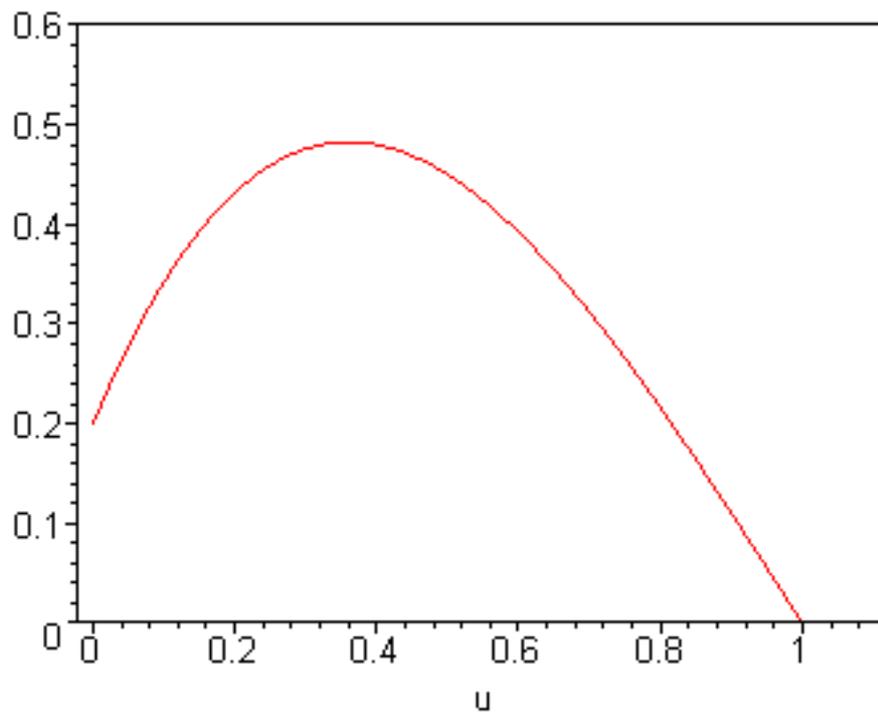
```
> plot(subs({u3=2, u2=1, u1=0.5, M=1/2},loes_kub),u=0.4..1.1, title=`Elliptische Bewegung`, axes=boxed, view=0..0.08);
```



Der Grenzübergang  $u \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow \infty$ ) entspricht einer unendlichen Bewegungsgröße

```
> plot(subs({u3=2, u2=1, u1=-0.1, M=1/2},loes_kub),u=0..1.1, title=`Hyperbolische Bewegung`, axes=boxed, view=0..0.6);
```

## Hyperbolische Bewegung



Kommen wir zur rechten Seite der modifizierten Grundgleichung zurück:

> **f**;

$$2 M u(\theta)^3 - u(\theta)^2 + \frac{2 u(\theta) M}{H^2} + \beta$$

In dieser Beziehung kann der zweite Term durch Substitution mit  $u(\theta) = y(\theta)^{\left(\frac{1}{3}\right)}$

$\left(\frac{2}{M}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{6M}$  eliminiert werden:

> **basic\_eq\_sub:=collect( subs(u(theta) = (2/M)^(1/3)\*y(theta) + 1/(6\*M), f), y(theta) );**

**basic\_eq\_sub:=**

$$4 y(\theta)^3 + \left( -\frac{2^{(1/3)} \left(\frac{1}{M}\right)^{(1/3)}}{6 M} + \frac{2 \cdot 2^{(1/3)} \left(\frac{1}{M}\right)^{(1/3)} M}{H^2} \right) y(\theta) - \frac{1}{54 M^2} + \beta + \frac{1}{3 H^2}$$

Diese Substitution vermindert unsere Gleichung und führt zur kanonischen Form der Weierstrass P Funktion [E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge (1927)]:

> **g2 = simplify(coeff(basic\_eq\_sub, y(theta)));**

```
g3 = -simplify(coeff(basic_eq_sub, y(theta), 0));
hlp:=diff( y(theta), theta)^2 = 4*y(theta)^3 - g2*y
(theta) - g3;
```

$$g_2 = -\frac{2^{(1/3)} \left(\frac{1}{M}\right)^{(1/3)} (H^2 - 12 M^2)}{6 M H^2}$$

$$g_3 = -\frac{-H^2 + 54 \beta M^2 H^2 + 18 M^2}{54 M^2 H^2}$$

$$hlp := \left(\frac{d}{d\theta} y(\theta)\right)^2 = 4 y(\theta)^3 - g_2 y(\theta) - g_3$$

Wir erhalten dann:

```
> y(theta) = WeierstrassP(theta, g2, g3);
y(theta) = WeierstrassP(theta, g2, g3)
```

Der verallgemeinerte Fall als Potential der Form eines Polynoms 3. Ordnung ergibt die Jacobi sn-Funktion:

```
> Orbit := proc(f, x)
print(`Equation in the form: u'(theta)^2 = a[0]*u^3+a[1]
*u^2+a[2]*u+a[3]`):
degree(f,x):
if(% = 3) then
a[0] := coeff(f, x^3):# coefficients of polynomial
a[1] := coeff(f, x^2):
a[2] := coeff(f, x):
a[3] := coeff(f, x, 0):
sol := solve(f = 0, x):
print(`Roots of polynomial u[1] < u[2] < u[3]:`):
print(sol[1], sol[2], sol[3]):
solution := u[1] + (u[2]-u[1])*JacobiSN(theta*sqrt( 2
*M*(u[3]-u[1]) )/2 + delta,sqrt((u[2]-u[1])/(u[3]-u[1])))
^2:
print(`Result through Jacobi sn - function`):
print(u(theta) = solution):
else
print(`The polynomial degree is not 3`)
fi
end:
```

Warning, `a` is implicitly declared local to procedure `Orbit`

Warning, `sol` is implicitly declared local to procedure `Orbit`

Warning, `solution` is implicitly declared local to procedure `Orbit`

> **Orbit(subs(u(theta)=x,f),x);**

Equation in the form:  $u'(theta)^2 = a[0]*u^3+a[1]*u^2+a[2]*u+a[3]$

Roots of polynomial  $u[1] < u[2] < u[3]$ :

$$(H^3 - 54 \beta M^2 H^3 - 18 H M^2 + 6 \sqrt{3} \sqrt{-M^2 H^2 + 16 M^4 - H^6 \beta + 27 H^6 \beta^2 M^2 + 18 H^4 \beta M^2 M})^{(1/3)} / (6 M H) + H^2 - 12 M^2) / (6 M H (H^3 - 54 \beta M^2 H^3 - 18 H M^2$$

$$+ 6 \sqrt{3} \sqrt{-M^2 H^2 + 16 M^4 - H^6 \beta + 27 H^6 \beta^2 M^2 + 18 H^4 \beta M^2 M})^{(1/3)} + \frac{1}{6 M}, - H^3 - 54 \beta M^2 H^3 - 18 H M^2$$

$$+ 6 \sqrt{3} \sqrt{-M^2 H^2 + 16 M^4 - H^6 \beta + 27 H^6 \beta^2 M^2 + 18 H^4 \beta M^2 M})^{(1/3)} / (12 M H)$$

$$H^2 - 12 M^2) / (12 M H (H^3 - 54 \beta M^2 H^3 - 18 H M^2$$

$$+ 6 \sqrt{3} \sqrt{-M^2 H^2 + 16 M^4 - H^6 \beta + 27 H^6 \beta^2 M^2 + 18 H^4 \beta M^2 M})^{(1/3)} + \frac{1}{6 M} +$$

$$\sqrt{3} ((H^3 - 54 \beta M^2 H^3 - 18 H M^2$$

$$+ 6 \sqrt{3} \sqrt{-M^2 H^2 + 16 M^4 - H^6 \beta + 27 H^6 \beta^2 M^2 + 18 H^4 \beta M^2 M})^{(1/3)} / (6 M H) - H^2 - 12 M^2) / (6 M H (H^3 - 54 \beta M^2 H^3 - 18 H M^2$$

$$+ 6 \sqrt{3} \sqrt{-M^2 H^2 + 16 M^4 - H^6 \beta + 27 H^6 \beta^2 M^2 + 18 H^4 \beta M^2 M})^{(1/3)}), - (H^3 - 54 \beta M^2 H^3 - 18 H M^2$$

$$+ 6 \sqrt{3} \sqrt{-M^2 H^2 + 16 M^4 - H^6 \beta + 27 H^6 \beta^2 M^2 + 18 H^4 \beta M^2 M})^{(1/3)} / (12 M H) H^2 - 12 M^2) / (12 M H (H^3 - 54 \beta M^2 H^3 - 18 H M^2$$

$$+ 6 \sqrt{3} \sqrt{-M^2 H^2 + 16 M^4 - H^6 \beta + 27 H^6 \beta^2 M^2 + 18 H^4 \beta M^2 M})^{(1/3)} + \frac{1}{6 M} -$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{3} \left( (H^3 - 54 \beta M^2 H^3 - 18 H M^2 \right. \\ & \left. + 6 \sqrt{3} \sqrt{-M^2 H^2 + 16 M^4 - H^6 \beta + 27 H^6 \beta^2 M^2 + 18 H^4 \beta M^2 M} \right)^{(1/3)} / (6 M H) - \\ & H^2 - 12 M^2) / (6 M H (H^3 - 54 \beta M^2 H^3 - 18 H M^2 \\ & + 6 \sqrt{3} \sqrt{-M^2 H^2 + 16 M^4 - H^6 \beta + 27 H^6 \beta^2 M^2 + 18 H^4 \beta M^2 M} \right)^{(1/3)}) \end{aligned}$$

*Result through Jacobi sn - function*

$$u(\theta) = u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{JacobiSN} \left( \frac{1}{2} \theta \sqrt{2} \sqrt{M(u_3 - u_1)} + \delta, \sqrt{\frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}} \right)^2$$

Wenn  $u_1 = \frac{1}{r_1}$  und  $u_2 = \frac{1}{r_2}$  kleine Werte für Planeten ( $r_1$  und  $r_2$  sind Perihel und Apohel) und  $u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{2M}$ , dann wird  $2M u_3 = 1$  und

**> u(theta) - u[1] = (u[2] - u[1])\*JacobiSN(1/2 \*theta+delta,0)^2;**

$$u(\theta) - u_1 = (u_2 - u_1) \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} + \delta \right)$$

Das ist die Gleichung der Umlaufbahn mit:  $e = \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1}$ .  $u_1 > 0$ . Diese korrespondiert mit der elliptischen Bewegung  $u_1 < 0$ . Diese wiederum korrespondiert mit der hyperbolischen Bewegung. Für die Bahnperiode im Allgemeinen Fall gilt: Hier korrespondiert der Zähler mit der  $\sin^2$  Periode Gibt so herzerfrischende Elliptische Funktionen!!

**> (u[2]-u[1])/(u[3]-u[1]):  
kernel := 2/sqrt((1-t^2)\*(1-t^2\*%)):  
int(kernel, t=0..1);**

$$2 \operatorname{EllipticK} \left( \sqrt{-\frac{-u_2 + u_1}{u_3 - u_1}} \right) + \left\{ \left\{ 2 \sqrt{\frac{u_3 - u_2}{-u_2 + u_1}} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \text{EllipticF} \left( \sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}}, \sqrt{-\frac{-u_2 + u_1}{u_3 - u_1}} \right) \left( \right. \\
& \sqrt{-\frac{(-2u_2 + 2u_1) \sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}}}{u_3 - u_1}} \sqrt{\frac{(u_3 - u_2) \sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}}}{u_3 - u_1}} \\
& \left. - \sqrt{\frac{(-u_2 + u_1) \sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}}}{u_3 - u_1}} \sqrt{\frac{(2u_3 - 2u_2) \sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}}}{u_3 - u_1}} \right) \\
& \left. \left( \sqrt{-\frac{(2u_3 - 2u_2) \sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}}}{u_3 - u_1}} \sqrt{\frac{(u_3 - u_2) \sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}}}{u_3 - u_1}} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\text{And} \left( -\sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}} < 1, \sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}} < 0 \right)$$

$$0, \text{ otherwise} \left. \right) + \left( \left( 2 \sqrt{\frac{u_3 - u_2}{-u_2 + u_1}} \text{EllipticF} \left( \sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}}, \sqrt{-\frac{-u_2 + u_1}{u_3 - u_1}} \right) \right) \right)$$

$$\sqrt{-\frac{(-2u_2 + 2u_1) \sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}}}{u_3 - u_1}} \sqrt{\frac{(u_3 - u_2) \sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}}}{u_3 - u_1}}$$

$$\begin{aligned}
& - \sqrt{\frac{(-u_2 + u_1) \sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}}}{u_3 - u_1}} \sqrt{\frac{(2u_3 - 2u_2) \sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}}}{u_3 - u_1}} \\
& \left( \sqrt{\frac{(2u_3 - 2u_2) \sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}}}{u_3 - u_1}} \sqrt{\frac{(u_3 - u_2) \sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}}}{u_3 - u_1}} \right. \\
& \left. \text{And} \left( \sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}} < 1, 0 < \sqrt{-\frac{u_3 - u_1}{-u_2 + u_1}} \right) \quad 0, \text{ otherwise} \right)
\end{aligned}$$

Eine Näherung für kleine  $u_1$  und  $u_2$  kann durch Polynomerweiterung gefunden werden.

```

> hlp:=series(2*EllipticK(x), x=0,4):
hlp_1:=convert(hlp,polynomial):
approx:=subs(x = sqrt( 2*M*(u[2]-u[1]) ), hlp_1);
approx:=pi + 1/2 pi M (u_2 - u_1)

```

Ausgehend von  $u(\theta)$  und dem Ausdruck der Periode der  $\sin^2$ , erkennen wir die Änderung der Winkelkoordinaten über eine Periode zu:

```

> delta_ang:=approx/(1/2*sqrt( 2*M*(u[3]-u[1]) )):
delta_ang_simp:=simplify(delta_ang);
delta_ang_simp:= -1/2 * pi * (-2 - M u_2 + M u_1) * sqrt(2) / sqrt(M (u_3 - u_1))

```

Da  $\sqrt{2M(u_3 - u_1)} = \sqrt{1 - 2M(u_1 - u_2 - u_1)} \sim 1 + M(2u_1 + u_2)$  ...und wir sehen als Ergebnis dies:

```

> hlp:=2*Pi*(1 + M*(u[2]-u[1])/2)*(1 + M*(2*u[1]+u[2])):
hlp_1:=series(hlp, u[1]=0,2):
hlp_2:=convert(hlp_1,polynomial):

```

```

hlp_3:=series(hlp_2, u[2]=0,2):
hlp_4:=convert(hlp_3,polynom):
hlp_5:=expand(hlp_4):
hlp_6:=expand(hlp_5-op(4,hlp_5)):
erg:=factor(hlp_6);
erg :=  $\pi(2 + 3 M u_1 + 3 M u_2)$ 

```

Die Abweichung von der vollen Periode verursacht die beobachtete Periheldrehung bei der Umkreisung eines Planeten um seine Sonne. Und so kommen wir dann zur bekannten Darstellung mit G und c

```

> hlp_1:=simplify(erg-2*Pi):
hlp_2:=subs({u[1]=1/r[1], u[2]=1/r[2]}, hlp_1):
hlp_3:=subs({r[1]=a*(1+e), r[2]=a*(1-e)},G*hlp_2/c^2):
Grav_F:=simplify(hlp_3);

```

$$Grav\_F := -\frac{6 G \pi M}{a c^2 (-1 + e^2)}$$

Aus dem Kepler Gesetz können wir über eine Periode folgendes ableiten:  
T ist die Orbitalzeit

```

> Kepler:=subs(M=4*Pi^2*a^3/T^2, %):
Kelper_simp:=simplify(Kepler);

```

$$Kelper\_simp := -\frac{24 G \pi^3 a^2}{T^2 c^2 (-1 + e^2)}$$

### Zusammenfassung

Diese ganze Rechnerei zeigte, daß man auch ohne Einstein Metriken zum Ziel kommt, Nur lange nicht so elegant!!! Im Wesentlichen haben wir es dem Lagrange Ansatz, der Differenz zwischen kinetischer und potentieller Energie zu verdanken, überhaupt so weit zu kommen. Jedoch ist das oben gezeigte keine richtige Lösung. Die kommt erst dann, wenn wir **wirklich** relativistisch rechnen.

Sind wir dennoch zufrieden: wir haben zumindest einmal die Lichtablenkung als auch die Periheldrehung zeigen können

Der nächste Teil, wenn daran dann noch Interesse besteht, geht dann in die "Vollen". Darin zeige ich dann das Leben und Vergehen der Sterne mit relativistischen Ansätzen und auch welche Schwarze Löcher denkbar sind.

Habe ich ja schon auszugsweise im Forum getan. Die schönen Bilder der Schwarzen Löcher stammen von diesen Gleichungen.

## Zweiter Teil: Relativistische Sterne und Schwarze Löcher

oder

*Vom Leben und vergehen der Sterne und des Weltraums*

### Einleitung

Die größte Fascination aus Vorhersagen der Gravitationstheorie ist diejenige der Existenz schwarzer Löcher. Das sind Objekte im Weltall von unglaublicher Schönheit, extremster Energieentfaltung sowie extremster Physik. Hier kommt man der Singularität sozusagen hautnah.

Ich möchte zeigen, daß diese Objekte ein Beispiel sind für unser Verständnis der Raumzeit, das uns seit der grundlegenden Arbeiten Einsteins bekannter geworden ist. Die folgenden Darstellungen basieren auf eine symmetrische Anschrift dieser Raumzeit. Erstaunlich ist, daß diese Voraussetzung zunächst keine oder nur unbedeutende Auswirkungen auf die Genauigkeit der Berechnungen hat. Auch werden wir die gekrümmte Raumzeit unter die Lupe nehmen.

Diese Prinzipien können u.a. gefunden werden in:

*C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation, San Francisco, 1973, V.*

*Frolov, I. Novikov, Physics of Black Holes, Kluwer, Dordrecht, 1998*

### Geometrische Einheiten

Eine sehr nützliche Normierung ist die in der Gravitationstheorie gerne benutze "geometrische Einheit". Während die linke Seite der Einstein-Gleichung den Krümmungstensor mit seiner Dimension  $\text{cm}^{-2}$  beschreibt, muß demnach die rechte

Seite die gleiche Dimension haben. Die Gravitationskonstante ist  $G = 6.673 \cdot 10^{(-8)}$

$$\frac{\text{cm}^3}{\text{g s}^2} = 1 \text{ und die Lichtgeschwindigkeit beträgt } c = 2.998 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 1,$$

Damit ergeben sich:

$$G / c^2 = .7425 \cdot 10^{(-28)} \quad \text{cm/g} = 1$$

$$c^5 / G = 3.63 \cdot 10^{59} \quad \text{erg/s} = 1 \quad \text{Leistungs Einheit}$$

$$G / c = 2.23 \cdot 10^{(-18)} \quad \text{Hz} * \text{cm}^2 / \text{g} = 1 \quad \text{Absorptions}$$

Charakteristik

$$c^2 / \sqrt{G} = 3.48 \cdot 10^{24} \quad \text{CGSE Einheiten}$$

(Feldstärke)

$$h/2\pi = 1.054 \cdot 10^{(-27)} \quad \text{g} * \text{cm}^2 / \text{s} = 2.612 \cdot 10^{(-66)} \quad \text{cm}^2$$

$$e = 1.381 \cdot 10^{(-34)} \quad \text{cm} \quad \text{Elementarladung}$$

$$1 \text{ ps} = 3.0856 \cdot 10^{18} \quad \text{cm}$$

$$1 \text{ eV} = 1.324 \cdot 10^{(-61)} \quad \text{cm}$$

Folgende Extremwerte in Länge, Zeit, Masse und Dichte, die Plack Einheiten, spielen eine sehr große, eine fundamentale Bedeutung:

$$\sqrt{\frac{G h}{2 \pi c^3}} = 1.616 \cdot 10^{(-33)} \text{ cm} \quad \text{Planck Länge}$$

$$\sqrt{\frac{G h}{2 \pi c^5}} = 5.391 \cdot 10^{(-44)} \text{ s} \quad \text{Planck Zeit}$$

$$\sqrt{\frac{h c}{2 \pi G}} = 2.177 \cdot 10^{(-5)} \text{ g} \quad \text{Planck Masse}$$

$$\frac{2 \pi c^5}{h G^2} = 5.157 \cdot 10^{93} \text{ g/cm}^3 \quad \text{Planck Dichte}$$

### *Beschreibung eines relativistischen Sterns*

Die ersten realistischen Metriken wurden von Schwarzschild zur Beschreibung der sphärischen Symmetrie sowie der statischen Raumkrümmung verwendet.

Literatur:

[http://de.wikipedia.org/wiki/Karl\\_Schwarzschild](http://de.wikipedia.org/wiki/Karl_Schwarzschild)

<http://www.phy.syr.edu/courses/modules/LIGHTCONE/schwarzschild.html>

[http://www.mpe.mpg.de/~amueller/astro\\_sl\\_schw.html](http://www.mpe.mpg.de/~amueller/astro_sl_schw.html)

Dies zeigen folgenden Beziehungen:

<code>g_compts</code> :	Metrik Komponenten
<code>g_compts[1,1]</code> :	Metrik Komponenten im Intervall abgeleitet nach $dt^2$
<code>g_compts[2,2]</code> :	Metrik Komponenten im Intervall abgeleitet nach $dr^2$
<code>g_compts[3,3]</code> :	Metrik Komponenten im Intervall abgeleitet nach $d\theta^2$
<code>g_compts[4,4]</code> :	Metrik Komponenten im Intervall abgeleitet nach $d\phi^2$
<code>g</code>	Kovarianter Metrik Tensor
<code>ginv</code>	kontravarianter Metrik Tensor

> **restart:**

**with(tensor):**

**with(plots):**

**with(linalg):**

**with(difforms):**

**coord := [t, r, theta, phi]:# spherical coordinates,**

**which will be designated in text as [0,1,2,3]**

**g\_compts := array(symmetric,sparse,1..4,1..4):**

**g\_compts[1,1] := -exp(2\*Phi(r)):**

**g\_compts[2,2] := exp(2\*Lambda(r)):**

**g\_compts[3,3] := r^2:**

**g\_compts[4,4] := r^2\*sin(theta)^2:**

**g := create([-1,-1], eval(g\_compts));**

**ginv := invert( g, 'detg' );**

Warning, the name `changecoords` has been redefined

Warning, the protected names `norm` and `trace` have been redefined and unprotected

$$g := \text{table}([\text{compts} = \begin{bmatrix} -e^{(2\Phi(r))} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(2\Lambda(r))} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}, \text{index\_char} = [-1, -1]])$$

$$g_{\text{inv}} := \text{table}([\text{compts} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{e^{(2\Phi(r))}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e^{(2\Lambda(r))}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2} \end{bmatrix}, \text{index\_char} = [1, 1]])$$

Wir verwenden die Standard MAPLE Prozedur für die Einstein'sche Tensor Definition

### Zwischenergebnisse

Die Idee:

Der Raum ist gekrümmt. Diese Krümmung wird mit Hilfe des Gauß'schen Krümmungsmaßes der Fläche, das damit auch seine Bezeichnung als Krümmungstensor gerechtfertigt. Bei geodätischer Übertragung lassen sich seine Ableitungen als Aggregate der Ableitungen der metrischen Fundamentalgrößen  $d_{ij}$  beschreiben. Geodätisch heißt, daß die Koordinaten in nichteuklid'scher Weise (nichtlinear) angegeben werden. Auf der Erde sind das meist Kugelkoordinaten. Bekannter Satz daraus:

**Die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist der Großkreis**

oder den Seefahrern bekannt

**Schneidet ein Kurs die Längengrade stets unter gleichem Winkel, wird diese Kurslinie Loxodrome genannt.**

Damit ist auch die Verwendung der Christoffelsymbole für die Indizierung der ersten und zweiten Art verbunden. Aggregate nennt man die Komponentenschriften der Achsen z.B.  $A_{(ij-j_i)}$  usw. Das ergibt sich aus der Summenbildung und deren Kurzanschrift. Der Krümmungstensor ist auch unter dem Namen: Riemann-Christoffel-Tensor, manchmal auch kurz Riemann-Tensor genannt, bekannt. Die erste Verjüngung desselben wurde von RICCI als symmetrisch erkannt. Daher trägt diese erste Verjüngung den Namen Ricci-Tensor. Unter Verjüngung versteht man auch Spurbildung. Hierbei wird die Stufe eines Tensors um zwei Stufen reduziert. Diese

besteht in der Gleichsetzung zweier Indices: eine ko- und eines kontravarianten Index. Anschließend wird über beide Indices summiert.

**Der Ricci Tensor ist ein Maßtensor. Er gibt Aufschluß über die Krümmung des Raums.**

**Der Riemann-Tensor beschreibt die relative Beschleunigung benachbarter Geodäten und damit auch die durch Gravitation verursachten lokalen Kräfte und Spannungen innerhalb eines ausgedehnten Körpers, die sogenannten Gezeitenkräfte.**

Literatur:

<http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/relativity/node94.html>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Friedmann-Gleichungen> Hier ist die schöne Herleitung der Friedmann Gleichung

zs sehe, welche diesen omonösen

Faktor  $8\pi$  herleitet!

```
> D1g := d1metric( g, coord );
D2g := d2metric( D1g, coord );
Cf1 := Christoffel1 ( D1g );
RMN := Riemann( ginv, D2g, Cf1 );
RICCI := Ricci( ginv, RMN );
RS := Ricciscalar( ginv, RICCI );
```

Estn ist der Einstein Tensor non\_zero sind seine von Null verschiedenen Komponenten

```
> Estn := Einstein( g, RICCI, RS );
displayGR(Einstein,Estn);
```

*The Einstein Tensor*

*non-zero components :*

$$G_{11} = - \frac{e^{(2\Phi(r))} \left( 2 \left( \frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) r + e^{(2\Lambda(r))} - 1 \right)}{r^2 e^{(2\Lambda(r))}}$$

$$G_{22} = - \frac{2 r \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) - e^{(2\Lambda(r))} + 1}{r^2}$$

$$G_{33} = - \frac{r \left( - \left( \frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) + \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) + r \left( \frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) \right) + r \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right)^2 - r \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) \left( \frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) \right)}{e^{(2\Lambda(r))}}$$

$$G_{44} = r \left( - \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) + \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) \cos(\theta)^2 + \left( \frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) - \left( \frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) \cos(\theta)^2 - r \left( \frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) \right) + r \left( \frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) \right) \cos(\theta)^2 - r \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right)^2 + r \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right)^2 \cos(\theta)^2 \right)$$

$$+ r \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) \left( \frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) - r \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) \left( \frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) \cos(\theta)^2 \right) / e^{(2\Lambda(r))}$$

*character : [-1, -1]*

Wir gehen zunächst vom bekannten Ansatz der Sternbeschreibung als Flüssigkeit aus. In diesem Fall ist der Energie-Momenten oder Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (\text{alle Komponenten von } u \text{ mit Ausnahme } u_0 \text{ sind gleich } 0 \text{ und } -1 = g^{(0,0)} u_0);$$

Die Signatur (-2) ergibt sich zu  $u_\alpha u^\alpha = 1$  und  $T_{\mu\nu} = (p + \rho) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}$ );

**Der Energie-Impuls-Tensor beschreibt den zeitlich-räumlichen Energiefluß durch ein räumliches Winkelsegment in beiden Richtungen.**

Sehr schön beschrieben in:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Energie-Impuls-Tensor>

Der Energie-Moment- oder Energie-Impuls-Tensor für einen Flüssigkeitstropfen ist:

```
> T_compts := array(symmetric,sparse,1..4,1..4):
T_compts[1,1] := exp(2*Phi(r))*rho(r):
T_compts[2,2] := exp(2*Lambda(r))*p(r):
T_compts[3,3] := p(r)*r^2:
T_compts[4,4] := p(r)*r^2*sin(theta)^2:
T := create([-1,-1], eval(T_compts));
```

$$T := \text{table}([\text{compts} = \begin{bmatrix} e^{(2\Phi(r))} \rho(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(2\Lambda(r))} p(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(r) r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(r) r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix},$$

`index_char = [-1, -1]`  
`]`

Die Einstein Gleichung kann auch nachgelesen werden in: *W.Pauli, Theory of relativity, Pergamon Press (1958)*

$$G_{\mu, \nu} = -8 \pi T_{\mu, \nu}$$

Jetzt werden wir die Tensor Komponenten entwickeln:

`> Energy_momentum := get_compts(T);`  
`Einstein := get_compts(Estn);`

$$\text{Energy\_momentum} := \begin{bmatrix} e^{(2\Phi(r))} \rho(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(2\Lambda(r))} p(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(r) r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(r) r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

`Einstein :=`

$$\left[ -\frac{e^{(2\Phi(r))} \left( 2 \left( \frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) r + e^{(2\Lambda(r))} - 1 \right)}{r^2 e^{(2\Lambda(r))}}, 0, 0, 0 \right]$$

$$\left[ 0, -\frac{2 r \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) - e^{(2\Lambda(r))} + 1}{r^2}, 0, 0 \right]$$

$$\left[ 0, 0, -\frac{r \left( -\left( \frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) + \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) + r \left( \frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) \right) + r \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right)^2 - r \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right)}{e^{(2\Lambda(r))}}, 0 \right]$$

, 0 ]

$$\left[ 0, 0, 0, r \left( -\left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) + \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) \cos(\theta)^2 + \left( \frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) - \left( \frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) \cos(\theta)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - r \left( \frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) \right) + r \left( \frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) \right) \cos(\theta)^2 - r \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right)^2 + r \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right)^2 \cos(\theta)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + r \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) \left( \frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) - r \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) \left( \frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) \cos(\theta)^2 \right] / e^{(2\Lambda(r))}$$

Die erste Einstein Gleichung für (0,0) - Komponenten ist:

```
> estn_hlp1:=8*Pi*Energy_momentum[1,1] + Einstein[1,1]:
estn_hlp2:=expand(estn_hlp1/exp(Phi(r))^2):
eq1 := simplify(estn_hlp2) = 0;
```

$$eq1 := \frac{8 \pi \rho(r) r^2 - 2 e^{(-2\Lambda(r))} \left( \frac{d}{dr} \Lambda(r) \right) r - 1 + e^{(-2\Lambda(r))}}{r^2} = 0$$

Und kann umgeschrieben werden in:

```
> eq1 := -8*Pi*rho(r)*r^2+Diff(r*(1-exp(-2*Lambda(r))),r)
= 0;
```

$$eq1 := -8 \pi \rho(r) r^2 + \left( \frac{d}{dr} (r(1 - e^{(-2\Lambda(r))})) \right) = 0$$

Die formale Substitution mit dem Exponentialansatz ergibt:

```
> eq1_n := subs( r*(1-exp(-2*Lambda(r))) = 2*m(r), lhs
(eq1)) = 0;
```

$$eq1_n := -8 \pi \rho(r) r^2 + \left( \frac{d}{dr} (2 m(r)) \right) = 0$$

```
> loes:=dsolve(eq1_n,m(r));
```

$$loes := m(r) = \int 4 \pi \rho(r) r^2 dr + \_CI$$

$m(r)$  ist die Masse innerhalb der Sphärengrenze mit Radius  $r$ . Damit die Integrationskonstante  $\Lambda$  gelöst werden kann müssen wir  $\Lambda$  aus  $m$  ermitteln:

```
> hlp_1:=r*(1-exp(-2*Lambda(r))) = 2*m(r):
exp_lamb:=expand(solve(hlp_1, exp(-2*Lambda(r)) ));
exp_lamb := 1 - \frac{2 m(r)}{r}
```

Die Lorentz Metrik (siehe den Ausdruck für  $g_{\mu\nu}$  aus  $\Lambda$ ) in Abwesenheit von Materie ist dann und nur dann möglich, wenn  $\rho = 0$  ist. Die zweite Einstein Gleichung für (1,1)-Komponenten ist:

```
> eq2 := simplify( 8*Pi*Energy_momentum[2,2] + Einstein
[2,2] ) = 0;
eq2 := \frac{8 \pi e^{(2\Lambda(r))} p(r) r^2 - 2 r \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) + e^{(2\Lambda(r))} - 1}{r^2} = 0
```

```
> eq2_2 := numer(lhs(simplify(subs(exp(2*Lambda(r)) = 1/
(1-2*m(r)/r), eq2)))) = 0;
eq2_2 := -8 \pi r^3 p(r) + 2 r^2 \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) - 4 r \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) m(r) - 2 m(r) = 0
```

Damit erhalten wir:

```
> eq2_3 := Diff(Phi(r),r) = solve(eq2_2, diff(Phi(r),r) );
eq2_3 := \frac{d}{dr} \Phi(r) = - \frac{4 \pi r^3 p(r) + m(r)}{r (-r + 2 m(r))}
```

Der Gradient des Gravitationspotentials  $\Phi$  ist größer als in der Newton

Formulierung  $\frac{\partial}{\partial r} \Phi = \frac{m}{r^2}$ , damit wird hier der innere Druck als Ursache der Gravitation angenommen. (Alle Schleifen-Quanten Menschen bitte ich um Nachsicht bei dieser Formulierung). Weiter geht es. Wir müssen jetzt die relativistische Gleichung der Hydrodynamik aufstellen. Das ist die eigentlich relevante Einstein Gleichung.  $u$  ist die 4-er Geschwindigkeit ... immer dran denken:  $x,y,z,ct$ ,  $Cf2$  ist die radiale Komponente der Euler Gleichung  $u_r = u_{th} = u_{ph}=0$

```
> compts := array([u_t,u_r,u_th,u_ph]):
u := create([1], compts):
Cf2 := Christoffel2 ( ginv, Cf1 ):
```

```

eq3_hlp:=(rho(r)+p(r))*get_compts(cov_diff( u, coord, Cf2
))[1,2]/(u_t) = -diff(p(r),r);
eq3 := Diff(Phi(r),r) = solve(eq3_hlp, diff(Phi(r),r) );
eq3_hlp := (rho(r) + p(r))  $\left(\frac{d}{dr} \Phi(r)\right) = -\left(\frac{d}{dr} p(r)\right)$ 

```

$$eq3 := \frac{d}{dr} \Phi(r) = -\frac{\frac{d}{dr} p(r)}{\rho(r) + p(r)}$$

Damit erhalten wir die bekannte Oppenheimer-Volkoff Gleichung des hydrodynamischen Druck-Gleichgewichts in Sternen. Diese spielt im Themenfeld der Sternentstehung und Sternentwicklung **DIE** entscheidende Rolle

```

> Diff(p(r),r) = factor( solve(rhs(eq3) = rhs(eq2_3),diff
(p(r),r) ) );

```

$$\frac{d}{dr} p(r) = \frac{(4 \pi r^3 p(r) + m(r)) (\rho(r) + p(r))}{r (-r + 2 m(r))}$$

Hier ist sichtbar, daß der Druckgradient größer als mit der klassischen Grenze  $\left(\frac{\partial}{\partial r} p\right)$

$\frac{\rho m}{r^2}$  ) ist. Der Unterschied wird durch das Anwachsen des Drucks -Zählerterm- und Abnahme des Radius r -Nennerterm- bei Annäherung an den Stern beschrieben. Damit nimmt in diesem Ansatz die Gravitation stärker zu als mit dem klassischen Newton Ansatz. Außerhalb des Sterns gilt:  $m(r)=M, p=0$  wobei M die Masse des Sterns ist..

Dann folgt weiterhin:

```

> hlp_eq4:=diff(Phi(r),r) = subs({m(r)=M,p(r)=0},rhs(eq2_3));
eq4 := dsolve(hlp_eq4, Phi(r));

```

$$hlp\_eq4 := \frac{d}{dr} \Phi(r) = -\frac{M}{r (-r + 2 M)}$$

$$eq4 := \Phi(r) = -\frac{1}{2} \ln(r) + \frac{1}{2} \ln(r - 2 M) + \_CI$$

Als Randwertbedingung -was anders ist diese als 0 im größten Abstand!!!???

schreiben wir:

```

> 0 = limit(rhs(eq4),r=infinity);
0 = _CI

```

Das setzen wir dann ein:

```
> Phi_r:=subs(_C1=0,eq4);
```

$$\Phi(r) = -\frac{1}{2} \ln(r) + \frac{1}{2} \ln(r - 2M)$$

Damit ergibt sich die Schwarzschildmetrik außerhalb des Sterns zu:

```
> g_matrix := get_compts(g);
```

$$g_{matrix} := \begin{bmatrix} -e^{(2\Phi(r))} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(2\Lambda(r))} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

```
> g_matrix := matrix([[-exp(2*Phi(r)), 0, 0, 0], [0, exp(2*Lambda(r)), 0, 0], [0, 0, r^2, 0], [0, 0, 0, r^2*sin(theta)^2]]);
```

$$g_{matrix} := \begin{bmatrix} -e^{(2\Phi(r))} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(2\Lambda(r))} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

sch_comp	metrische Schwarzschild Komponenten
sch_compts[1,1]	zugehörige Koeffizienten von dt <sup>2</sup> im Intervall
sch_compts[2,2]	zugehörige Koeffizienten von dr <sup>2</sup> im Intervall
sch_compts[3,3]	zugehörige Koeffizienten von dtheta <sup>2</sup> im Intervall
sch_compts[4,4]	zugehörige Koeffizienten von dphi <sup>2</sup> im Intervall
sch	Schwarzschild Metrik

```
> coord := [t, r, theta, phi]:
sch_compts := array(symmetric,sparse,1..4,1..4):
sch_compts[1,1] := expand( subs(Phi(r)=-1/2*ln(r)+1/2*ln(r-2*M),g_matrix[1,1]) ):
sch_compts[2,2] := expand( subs(Lambda(r)=-ln(1-2*M/r)/2,g_matrix[2,2]) ):
sch_compts[3,3]:=g_matrix[3,3]:
sch_compts[4,4]:=g_matrix[4,4]:
sch := create([-1,-1], eval(sch_compts));
```

$$sch := \text{table}([compts = \begin{bmatrix} -1 + \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}, index\_char = [-1, -1])$$

$\rho = \rho_0 = \text{const}$  (etwas später wird folgende Näherung verwendet  $p = (\gamma - 1) \rho$ , worin  $\gamma = 1$  kann als Staub betitelt werden,  $4/3$  Anteil nichtkohärenter Abstrahlung, 2 feste Materie, kann als Stein oder Fels betitelt werden. Dann wird diese Masse beschrieben:  $M$  beschreibt die Gesamtmasse.

```
> m(r) = int(4*Pi*rho0*r^2, r);
M = subs(r=R, rhs(%));
```

$$m(r) = \frac{4 \pi \rho_0 r^3}{3}$$

$$M = \frac{4 \pi \rho_0 R^3}{3}$$

Der Druck bestimmt sich zu:: Das ist die Oppenheim-Volkoff Gleichung

```
> hlp_eq5 := diff(p(r), r) = subs( {rho(r)=rho0, m(r)=4/3
*Pi*rho0*r^3}, \
-(4*Pi*r^3*p(r)+m(r))*(rho(r)+p(r))/(r*(r-2*m(r))) );
eq5 := dsolve(hlp_eq5, p(r));
```

$$hlp\_eq5 := \frac{d}{dr} p(r) = - \frac{\left(4 \pi r^3 p(r) + \frac{4 \pi \rho_0 r^3}{3}\right) (\rho_0 + p(r))}{r \left(r - \frac{8}{3} \pi \rho_0 r^3\right)}$$

$$eq5 := p(r) = \frac{(-6 + 2 \sqrt{-3 e^{(16\_CI \pi \rho_0)} + 8 \pi \rho_0 r^2 e^{(16\_CI \pi \rho_0)}}) \rho_0}{-9 - 3 e^{(16\_CI \pi \rho_0)} + 8 \pi \rho_0 r^2 e^{(16\_CI \pi \rho_0)}} - \rho_0,$$

$$p(r) = \frac{(-6 - 2 \sqrt{-3 e^{(16\_CI \pi \rho_0)} + 8 \pi \rho_0 r^2 e^{(16\_CI \pi \rho_0)}}) \rho_0}{-9 - 3 e^{(16\_CI \pi \rho_0)} + 8 \pi \rho_0 r^2 e^{(16\_CI \pi \rho_0)}} - \rho_0$$

Achtung beim Substituieren: Prozedur muß so laufen: den zu substituierenden Begriff "in die Maus" nehmen "ctrl c" und dann: subs ( ctrl v = ...) dann tuts!!!  
Der Exponentialausdruck hinter dem Komma im Lösungsmechanismus beschreibt die Randwertbedingung.

```
> hlp_1:=solve(simplify(subs(r=R,rhs(eq5[1])))=0,exp(16*_C1*Pi*rho0)); hlp_2:=solve(simplify(subs(r=R,rhs(eq5[2])))=0,exp(16*_C1*Pi*rho0));
```

$$hlp_1 := \frac{3 + 2 \sqrt{(e^{(-C1 \pi \rho_0)})^{16} (-3 + 8 \pi \rho_0 R^2)}}{-3 + 8 \pi \rho_0 R^2}$$

$$hlp_2 := -\frac{-3 + 2 \sqrt{(e^{(-C1 \pi \rho_0)})^{16} (-3 + 8 \pi \rho_0 R^2)}}{-3 + 8 \pi \rho_0 R^2}$$

```
> loes_1 := simplify(subs(exp(16*_C1*Pi*rho0) = -3+8*Pi*rho0*R^2,rhs(eq5[1])));
```

```
loes_2 := simplify(subs(exp(16*_C1*Pi*rho0) = -3+8*Pi*rho0*R^2,rhs(eq5[2])));
```

```
loes_1 :=
```

$$-\frac{3 - \sqrt{(-3 + 8 \pi \rho_0 R^2) (-3 + 8 \pi \rho_0 r^2) - 12 \pi \rho_0 R^2 - 12 \pi \rho_0 r^2 + 32 \pi^2 \rho_0^2 r^2}}{4 \pi (-3 R^2 - 3 r^2 + 8 r^2 \pi \rho_0 R^2)}$$

```
loes_2 :=
```

$$-\frac{3 + \sqrt{(-3 + 8 \pi \rho_0 R^2) (-3 + 8 \pi \rho_0 r^2) - 12 \pi \rho_0 R^2 - 12 \pi \rho_0 r^2 + 32 \pi^2 \rho_0^2 r^2}}{4 \pi (-3 R^2 - 3 r^2 + 8 r^2 \pi \rho_0 R^2)}$$

In der Sternenmitte (Zentrum) haben wir:

```
> druck_1:=simplify(subs(r=0,loes_1));
```

```
druck_2:=simplify(subs(r=0,loes_2));
```

$$druck_1 := -\frac{-3 + \sqrt{9 - 24 \pi \rho_0 R^2} + 12 \pi \rho_0 R^2}{12 \pi R^2}$$

$$druck_2 := -\frac{-3 - \sqrt{9 - 24 \pi \rho_0 R^2} + 12 \pi \rho_0 R^2}{12 \pi R^2}$$

Der Druck ist im Abstand R\_crit unendlich hoch:

```
> R_crit1 = simplify(solve(expand(denom(druck_1))=0,R))
```

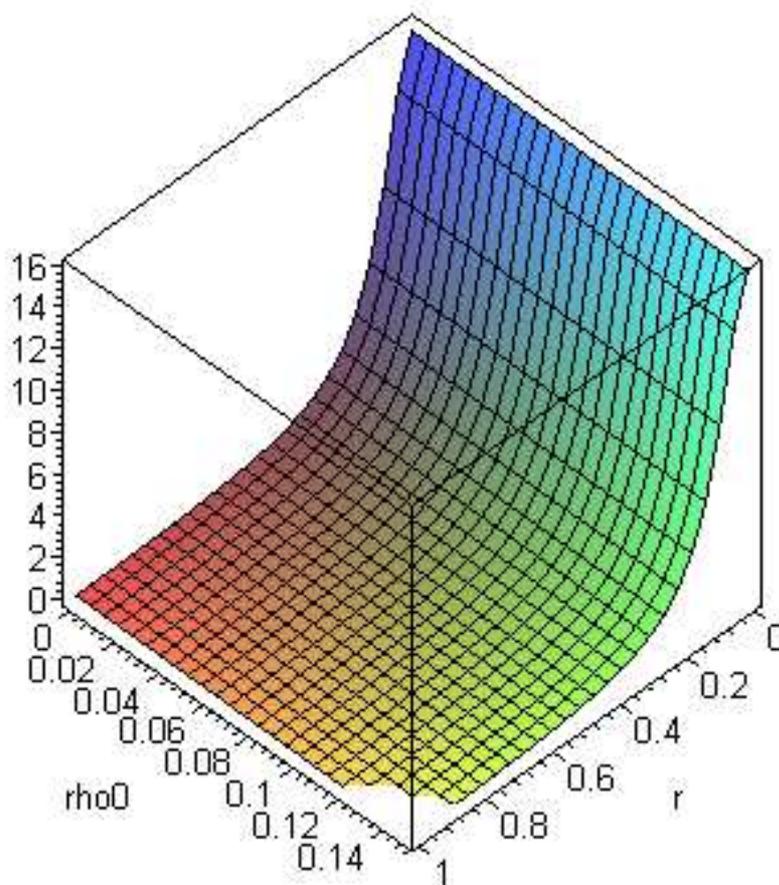
```
[1],radical,symbolic);
R_crit2 = simplify(solve(expand(denom(druck_2))=0,R)
[2],radical,symbolic);
```

$$R_{crit1} = 0$$

$$R_{crit2} = 0$$

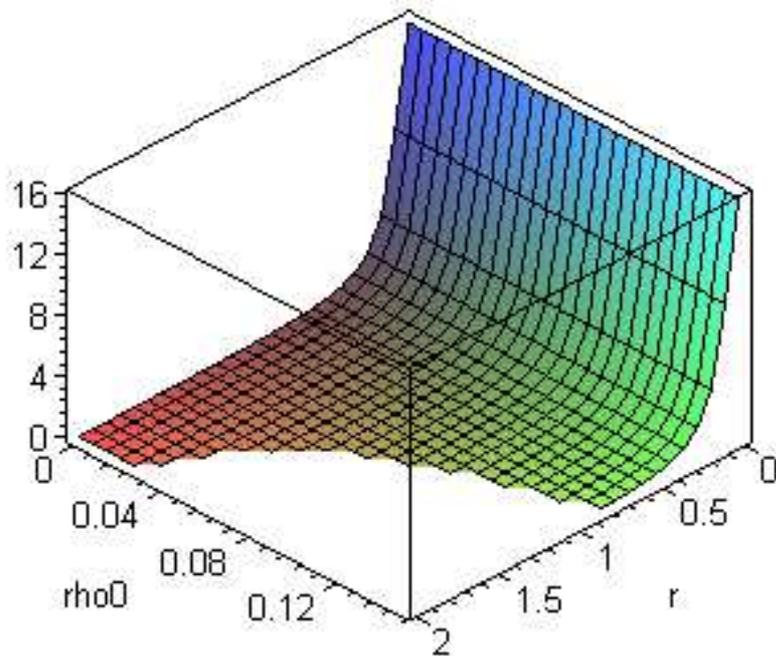
Nur positive Lösungen machen Sinn...was ist denn auch ein negativer Druck? Im Vakuum ist der Druck 0.  $\rho$  ist die inkompressible Masse. Ich lasse mal den Parameter  $\rho$  bis 0.15 laufen. Damit wird verdeutlicht, daß sich bereits im Abstand 1 keine Änderung ergibt. Abstand 1 bedeutet: Sternrand Das zweite Bild zeigt das Verhalten bis zum doppelten Abstand, heißt: Bis zum Abstand von einem Sternradius bezogen auf Sternoberfläche.

```
> plot3d({subs(R=1e-1,loes_2) },r=0..1,rho0=
0..0.15,axes=boxed,title=`Druck vergrößert sich
exponentiell bei Abnahme des Radius`);
Druck vergrößert sich exponentiell bei Abnahme des Radius
```



```
> plot3d({subs(R=1e-1,loes_2) },r=0..2,rho0=
0..0.15,axes=boxed,title=`Druck vergrößert sich
exponentiell bei Abnahme des Radius`);
```

Druck vergrößert sich exponentiell bei Abnahme des Radius



Um die Raumzeit Geometrie vorstellbar zu machen nehmen wir eine Äquator Sektion des Sterns von ( $\theta = \pi/2$ ) und frieren die Zeit mal in einen 3-dimensionalen Raum ein. Diese Prozedur ist unter dem Namen "embedding" bekannt. Ausgehend vom Metrik Tensor, das 2-dimensionale Linienelement ist:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\phi^2$$

und für den Euklid'schen 3 dimensionalen Raum:

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2$$

Wir führen mal eine 2 dimensionale Oberfläche ein:

$$z=z(r). \text{ As } dz = \frac{dz}{dr} dr$$

und erhalten damit der Euklid Linien- Element:

$$ds^2 = \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2$$

schw\_met: Schwarzschild metrik

eq\_fl\_em Gleichsetzung flacher und eingebetterter Raum

embedd eingebetteter Raum

```
> schw_met:=subs(theta=Pi/2,get_compts(sch));
eq_fl_em:=dr^2*schw_met[2,2] + dphi^2*%[3,3] = (1+diff
```

```
(z(r),r)^2)*dr^2 +r^2*dphi^2;
embedd_diff:=diff(z(r),r) = solve(%,diff(z(r),r))[1];
embedd_erg:=dsolve(embedd_diff,z(r));
```

$$schw\_met := \begin{bmatrix} -1 + \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$eq\_fl\_em := \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 dphi^2 = \left( 1 + \left( \frac{d}{dr} z(r) \right)^2 \right) dr^2 + r^2 dphi^2$$

$$embedd\_diff := \frac{d}{dr} z(r) = \frac{\sqrt{2} \sqrt{(r-2M)M}}{r-2M}$$

$$embedd\_erg := z(r) = 2 \sqrt{2 r M - 4 M^2} + \_C1$$

Wir nehmen die vorletzte Gleichung und drücken M durch  $\rho_0 = \text{const}$ : aus  
rho\_loes      Dichte der Gesamtmasse  
space\_inside    Raum innen  
space\_outside    Raum außen

```
> rho_loes := solve(M = 4/3*Pi*rho0*R^3,rho0);
space_inside:= Int(1/sqrt(r/((4/3)*Pi*rho0*r^3)-1),r);
space_outside:= Int(1/sqrt(r/((4/3)*Pi*rho0)-1),r);
```

$$rho\_loes := \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$space\_inside := \int \frac{2}{\sqrt{\frac{3}{r^2 \pi \rho_0} - 4}} dr$$

$$space\_outside := \int \frac{2}{\sqrt{\frac{3r}{\pi \rho_0} - 4}} dr$$

```
> inside:=value(subs(rho0=rho_loes,space_inside));
outside:= value(subs(rho0=rho_loes,space_outside));
```

$$inside := \frac{-R^3 + r^2 M}{\sqrt{-\frac{-R^3 + r^2 M}{r^2 M}} r M}$$

$$outside := \frac{\sqrt{\frac{4 r R^3}{M} - 4 M}}{R^3}$$

Das Ergebnis dieser "Einbettung" für die äquatoriale und vertikale Zone wird unten gezeigt. Der "Newton Fall" entspricht der horizontalen Oberfläche mit ihrer Asymptote  $r \rightarrow \infty$ . Der außenliegende Raum liegt außerhalb eines Rings, der die "Begrenzung" des Sterns darstellt

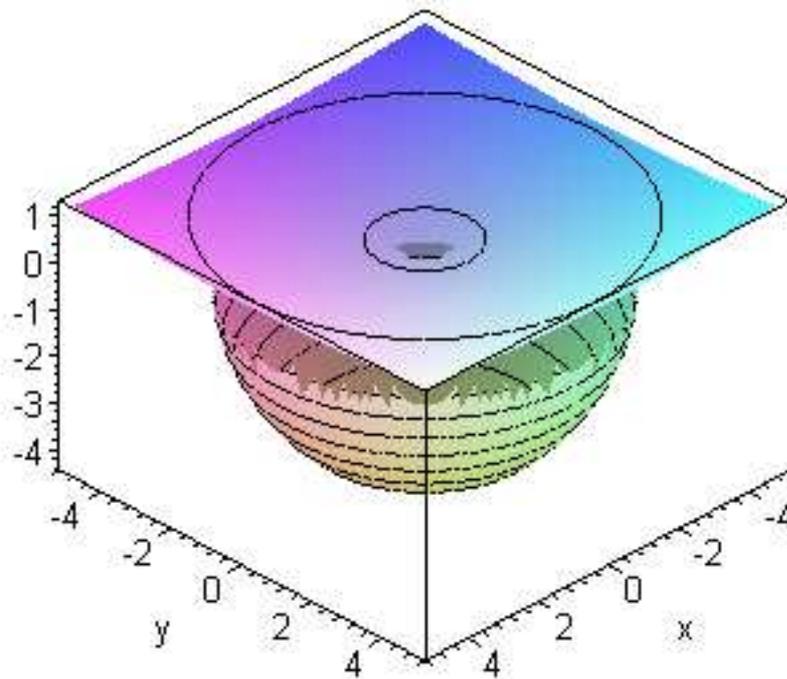
fig1: Das Sternen Innere (r in Einheit von M) ... nicht verwirren lassen, ist nur eine Normierung

fig2: Das Sternen Äußere

```
> fig1 := plot3d(subs(M=1,subs(R=2.66*M,subs(r=sqrt(x^2+y^2),inside))),x=-5..5,y=-5..5,grid=[100,100],style=PATCHCONTOUR):
```

```
fig2 := plot3d(subs(M=1,subs(R=2.66*M,subs(r=sqrt(x^2+y^2),outside))),x=-5..5,y=-5..5,style=PATCHCONTOUR):
```

```
display(fig1,fig2,axes=boxed);
```



### Erläuterung des Schwarzen Lochs

Es wurde gezeigt, daß die Änderung der Radialkomponente  $dr$  gegenüber der Änderung des Intervalls  $dl$ , welches die Länge des Kurvensegments darstellt in der Umgebung des Sterns kleiner ist im Vergleich zum Newton Fall (Ebene  $z=0$  und dort ist auch  $dr = dl$ ).

$$dl = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}$$

Der Stern verändert den Raum so daß ein Beobachter sich vom Stern fortbewegt, jedoch die Radial Koordinate langsam anwächst. Damit ergibt sich so etwas wie eine Art Loch in der unmittelbaren Umgebung dieser Oberfläche, welche oben als "Außen" benannt wurde. Was passiert eigentlich, wenn dieser Stern gerade einen Radius besitzt, welcher exakt in diese Grenze  $R = 2M$  hineinfällt? Solch ein Objekt wird "Schwarzes Loch" genannt

Ein Probekörper bewegt sich in der Nähe des Schwarzschildradius. Diese Bewegung sei relativistisch gesehen gering:

$$g^{(\alpha, \beta)} p_\alpha p_\beta + \mu^2 = 0 \quad (p \text{ ist das 4-Moment, } \mu \text{ ist die Ruhemasse}).$$

Dort, wo  $L$  mit dem Winkelmoment  $\lambda$  (affiner (umkehrbarer) Parameter) korrespondiert wird, beschreibt der zweite Term die Radial Geschwindigkeit.

hlp\_1.  $\tau = \lambda * \mu$   $E = E/\mu$   $L = L/\mu$   
 eq6 beschreibt das Bewegungs Integral (Lösung der DGL)  
 V wird effektives Potential genannt

$$> \text{eq6\_hlp} := -E^2 / (1 - 2*M/r(\tau)) + \text{diff}(r(\tau), \tau)^2 / (1 - 2$$

```

*M/r(tau)) + L^2/r(tau)^2+1 = 0;
eq6 := diff(r(tau),tau)^2 = expand(solve(eq6_hlp,diff(r
(tau),tau)^2));
V := sqrt(-factor(op(2,rhs(eq6)) + op(3,rhs(eq6)) + op
(4,rhs(eq6)) + op(5,rhs(eq6))));

```

$$eq6\_hlp := -\frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r(\tau)}} + \frac{\left(\frac{d}{d\tau}r(\tau)\right)^2}{1 - \frac{2M}{r(\tau)}} + \frac{L^2}{r(\tau)^2} + 1 = 0$$

$$eq6 := \left(\frac{d}{d\tau}r(\tau)\right)^2 = E^2 + \frac{2M}{r(\tau)} - \frac{L^2}{r(\tau)^2} + \frac{2L^2M}{r(\tau)^3} - 1$$

$$V := \sqrt{\frac{(r(\tau)^2 + L^2)(r(\tau) - 2M)}{r(\tau)^3}}$$

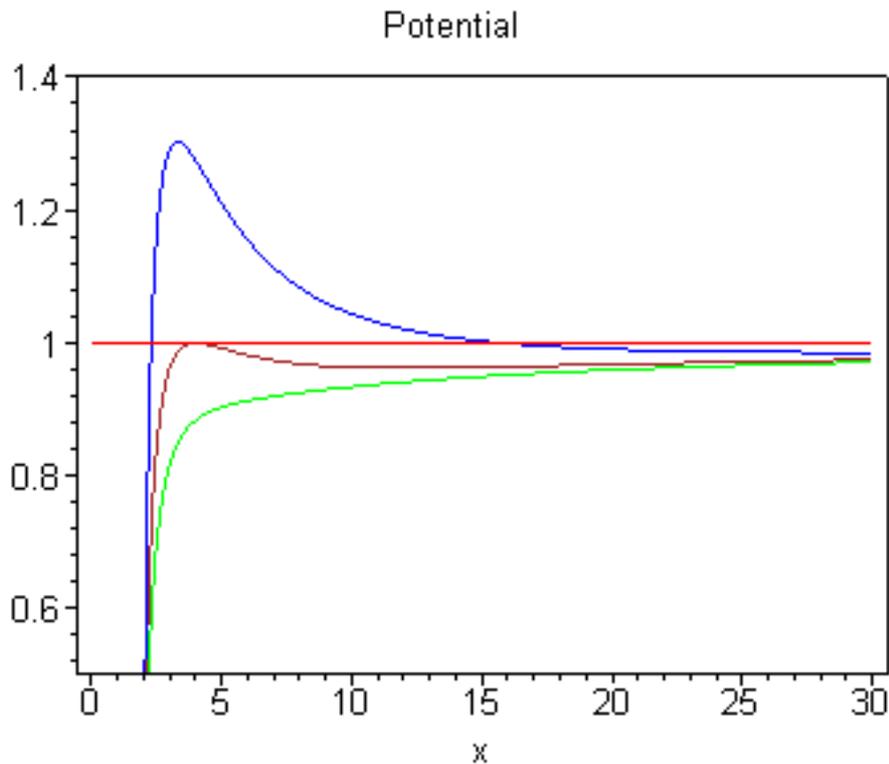
Das effektive Potential zeigt die Orbitalbewegung, Es beschreibt die Änderung des Winkelmoments L bezüglich des Abstands r. Der Level E=1 gehört zu einem Partikel das Anfangs bewegungslos ist.

```

> hlp:=subs({M=1,r(tau)=x,L=y},V);
plot({subs(y=3,hlp),subs(y=4,hlp),subs(y=6,hlp),1},x=
0..30,axes=boxed,color=
[red,green,blue,brown],title=`Potential`,view=0.5..1.4);

```

$$hlp := \sqrt{\frac{(x^2 + y^2)(x - 2)}{x^3}}$$



Im ersten Teil haben wir die Bewegung im relativistischen Potential betrachtet. Jedoch haben wir uns beschränkt auf eine lineare Näherung. Das ist gleichbedeutend mit einem schwachen Feld. Wir haben also lediglich schwache Gravitationsfelder diskutiert. Aus diesen Betrachtungen heraus ergaben sich auch die Perihel Drehung sowie die Lichtablenkung unter Masseneinfluß.

Diese lineare Einschränkung haben wir teilweise überwunden und haben unter die relativistische Bewegung unter dem Potentialbegriff kennengelernt. Wenn gilt:

$V_{max} > E > 1$  dann geht die Bewegungsgröße gegen unendlich. Damit sind wir mit dem hyperbolischen Newton Ansatz gleich. Wenn  $E$  im Potential Topf (Loch) liegt, oder  $E = V$ , dann haben wir eine begrenzte Bewegungsgröße. Die Bewegungsgröße verbunden mit dem Energiebegriff, die gleich der Extremwerte des Potentials ist, beschreibt dann die Kreisbewegung. Diese stabile Bewegungsgröße (Zentrifugalkraft = Zentripetalkraft) bestimmt sich durch das Energieminimum, wird aber instabil bei Energiemaximum. Die Existenz dieser Extremata wird durch folgende Beziehungen verdeutlicht:

move\_zeroes Nullstellen der Ableitung des Potentials

```
> move_zeroes:=numer( simplify( diff( subs(r(tau)=r,V), r) )=0;
```

```
> zeroes_erg:=solve(move_zeroes,r);
      move_zeroes:=r2 M - r L2 + 3 L2 M = 0
```

$$zeroes\_erg := \frac{(L + \sqrt{L^2 - 12 M^2}) L}{2 M}, \frac{(L - \sqrt{L^2 - 12 M^2}) L}{2 M}$$

Die Konsequenz daraus ist:

Die Kreisbewegung ist möglich, wenn:  $L > 2M\sqrt{3}$ . Das gilt, wenn:  $r > 3(2M)$ . Der minimal Abstand, ab dem die Kreisbewegung instabil wird ist:

```
> instable:=limit(1/2*(L-sqrt(L^2-12*M^2))*L/M,
L=infinity);
```

$instable := 3 M$

Fehlen Extremata (siehe rote Kurve im obigen Plot) oder der Übergang durch  $r < 3M$  endet in einer Fallbewegung (auf den Stern zu), das ist ähnlich, als würde gelten:  $E > V_{max}$ . Dies wird auch **Gravitationsfalle** genannt. Auch hier gibt es ein Newton Analogon: das der Punktmasse! Die begrenzte Bewegung für den Fall eines lokalen Minimums (blaue Kurve des obigen Plots) ist das Analogon zu Newton aber besitzt keinen elliptischen Charakter. Ich möchte inen besonderen Fall für  $L=0$  zeigen. Die wirkliche Zeit eines fallenden Probekörpers ist: Radius für "Nullgeschwindigkeit:  $R=2*M/(1-E^2)$

**tau\_erg** ist das konvergente Integral für  $r \rightarrow 2M$

```
> tau_1:= Int( 1/sqrt(subs({L=0,r(tau)=r},rhs(eq6))),r);
> tau:= Int(1/(sqrt(2*M/r-2*M/R)),r);
> tau_simp:=limit( value( tau ),r=2*M );
> tau_erg:=simplify(tau_simp);
```

$$tau_1 := \int \frac{1}{\sqrt{E^2 + \frac{2M}{r} - 1}} dr$$

$$\tau := \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}} dr$$

$$tau_simp := \frac{1}{2} \left( -2 \sqrt{\frac{R-2M}{R}} R \sqrt{-2MR+4M^2} + \sqrt{\frac{R-2M}{R}} R^2 \ln(2) - \sqrt{\frac{R-2M}{R}} R^2 \ln(-R+4M+2\sqrt{-2MR+4M^2}) \right) / \sqrt{-2MR+4M^2}$$

$$tau\_erg := \frac{1}{4} \sqrt{\frac{R-2M}{R}} R$$

$$(2\sqrt{2} \sqrt{-M(R-2M)} - R \ln(2) + R \ln(-R + 4M + 2\sqrt{2} \sqrt{-M(R-2M)})) \sqrt{2},$$

$$\sqrt{-M(R-2M)}$$

Ein von außen schauender Beobachter "sieht"

$$\frac{\partial}{\partial \tau} r = \frac{\partial}{\partial t} r \quad \frac{\partial}{\partial \tau} t = \frac{\partial}{\partial t} r \quad \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}} = E \frac{\partial}{\partial t} r_o$$

$r_o$  ist die Zeitkoordinate des sich im unendlichen befindenden Beobachters...Ob der noch was sieht von so weit weg?

**r\_erg ist das divergente Integral für  $r \rightarrow 2M$**

```
> r[o] := Int(1/(1-2*M/r),r) = int(1/(1-2*M/r),r);
r_erg:=limit( value( rhs(%) ),r=2*M );
```

$$r_o := \int \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr = r + 2M \ln(r - 2M)$$

$$r\_erg := -\text{signum}(M) \infty$$

Diese Gleichungen werden weiter benützt.

### ***Entartete Sterne und ihr Gravitationskollaps***

Die gerade erhaltene Ausdrücke für die Zeit des radialen Falls zeigen eine

Besonderheit, wenn der Radius des Sterns kleiner oder gleich  $2M \left( \frac{2GM}{c^2} \right)$  ist.

Diese Grenze wird auch Gravitationsradius  $R_g$  genannt. Die endliche wirkliche Zeit  $\tau$  des Falls ist in Übereinstimmung oder korrespondiert mit der endlichen "äußeren"

Zeit  $r_o$ , wenn  $r \rightarrow 2M$  strebt. Das sieht für den weit entfernten Beobachter so aus, als würde dieser Fall niemals enden. Oder ander gesagt: die relativistische Zeit wird langsamer. Als Konsequenz dieses Phänomens sieht man die äußerst starke rot Verschiebung eines "fallenden oder angesaugten" Photons. Das begründet sich in der Schwarzschild Metrik und wird über folgende Frequenz Beziehung beschrieben:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\Delta \tau_2}{\Delta \tau_1} = \sqrt{\frac{g_{0,0}(r_2)}{g_{0,0}(r_1)}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_2}}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_1}}}$$

$\Delta \tau$  ist das wirkliche Zeitintervall zwischen zwei Lichtblitzen an verschiedenen radialen Punkten. Gleichzeitig ist die Fluchtgeschwindigkeit  $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ . Dies ist diejenige Geschwindigkeit ab der das Licht aus der Sphäre mit Radius  $R = R_s$  entweichen kann. Damit können wir keinerlei Informationen aus dem schwarzen Loch selber erhalten. Es bleibt bei mathematischen bzw interpretativen Erklärungsversuchen. Ist doch dürrtig oder nicht? Aber da läßt sich eben nichts machen. Wir haben die Hoffnung auf indirekten Wege mehr aus dem Inneren dieser schwarzen Lochhülle zu erhalten...??? Wie jedoch kann ein Objekt mit einem Radius kleiner als  $R_s$  auftreten? Wir fangen mal vorsichtig mit dem Druck des freien Radialzusammenbruchs (das ist der Winkelteil bei dem die Metrik 0 ist) der Staub Sphäre der Masse M an..

$d(s)^2$  beschreibt die Schwarzschild Metrik  
 $\tau$  die wirkliche Zeit, welche für einen Beobachter am Grund der Sphäre vergeht.  
 $\text{pot}_1$  Potential

```
> r := 'r':
E := 'E':
hlp_1:=subs( r=r(t),get_compts(sch) ):
d(s)^2 = hlp_1[1,1]*d(t)^2 + hlp_1[2,2]*d(r)^2;
-d(tau)^2 = collect(subs( d(r)=diff(r(t),t)*d(t),rhs(%)
),d(t));
%/d(tau)^2;
subs({d(t)=E/(1-2*M/r(t)),d(tau)=1},%);#we used d(t)/d
(tau) = E/(1-2*M/r)
pot_1 := factor( solve(%,(diff(r(t),t))^2) );
```

$$d(s)^2 = \left(-1 + \frac{2M}{r(t)}\right) d(t)^2 + \frac{d(r)^2}{1 - \frac{2M}{r(t)}}$$

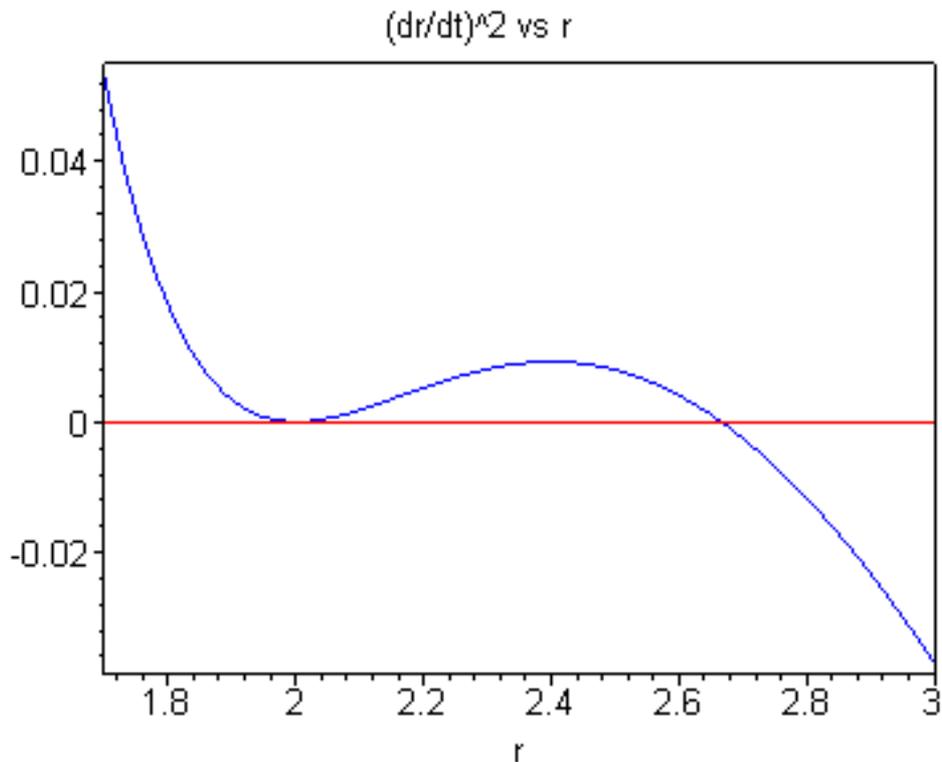
$$-d \left( \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}} dr \right)^2 = \left( -1 + \frac{2M}{r(t)} + \frac{\left(\frac{d}{dt} r(t)\right)^2}{1 - \frac{2M}{r(t)}} \right) d(t)^2$$

$$-1 = \frac{\left( -1 + \frac{2M}{r(t)} + \frac{\left( \frac{d}{dt} r(t) \right)^2}{1 - \frac{2M}{r(t)}} \right) d(t)^2}{\left( \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}} dr \right)^2}$$

$$-1 = \frac{\left( -1 + \frac{2M}{r(t)} + \frac{\left( \frac{d}{dt} r(t) \right)^2}{1 - \frac{2M}{r(t)}} \right) E^2}{\left( 1 - \frac{2M}{r(t)} \right)^2}$$

$$pot\_1 := \frac{(-r(t) + 2M)^2 (2M - r(t) + E^2 r(t))}{E^2 r(t)^3}$$

```
> plot({subs({E=0.5,M=1,r(t)=r},pot_1),0*r},r=
1.7..3,axes=boxed,color=[red,blue],title=`(dr/dt)^2 vs
r`);
```



Der beschriebene Kollaps ist die Bewegung ausgehend vom rechten Punkt der "Null"

Geschwindigkeit  $\frac{\partial}{\partial t} r$  -das ist diejenige Geschwindigkeit welche für den entfernten Beobachter gilt- hin zum linken Punkt der Null Geschwindigkeit. Im oberen Graph sind diese als Nullstellen schön zu sehen. Die linke Nullstelle ist gleichzeitig ein relatives Minimum. Diese Punkte sind:

```
> zero_v:=solve(subs(r(t)=r,pot_1)=0,r);
zero_v:=2 M, 2 M, -\frac{2 M}{E^2 - 1}
```

Es gilt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} r\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \left(\frac{2M}{r} - 1 + E^2\right)}{E^2} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \left(\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}\right)}{1 - \frac{2M}{R}} = \left(1 - \frac{R_g}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{1 - \frac{R_g}{r}}{1 - \frac{R_g}{R}}\right)$$

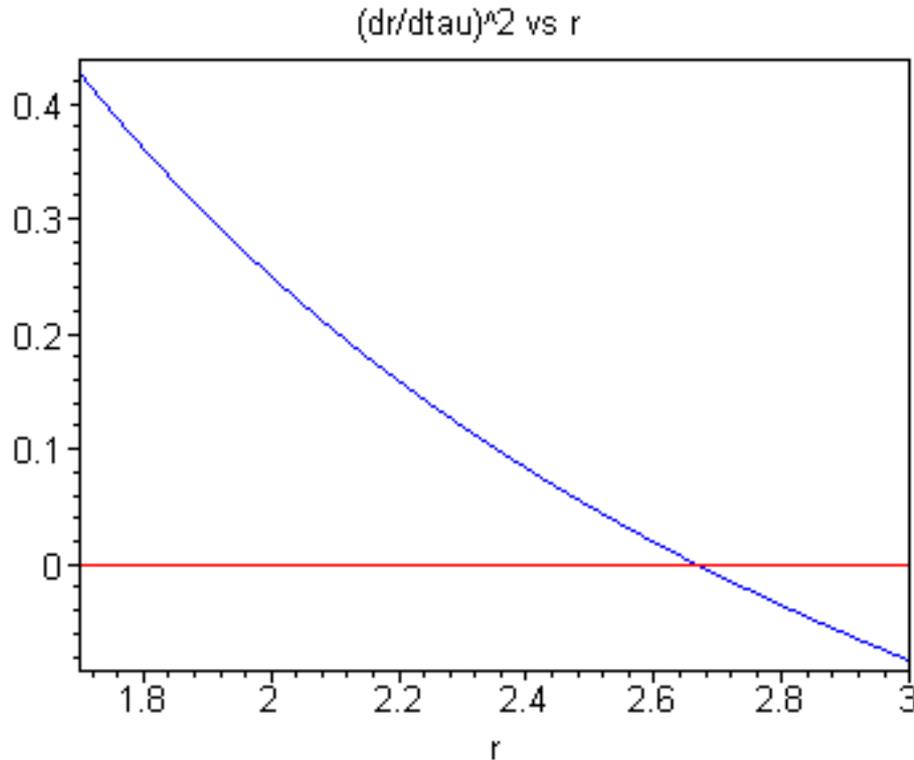
Der verlangsamende Kollaps für den entfernten Beobachter in der Umgebung von  $R_g$  wird durch die Zeitdilatation verursacht. Trotzdem hat der Beobachter im Kollaps

selber die wahre Geschwindigkeit  $\frac{\partial}{\partial \tau} r$  :  $d/d(t)=(d/d(\tau))*(1-2*M/r)/E$

```
> pot_2 := simplify(pot_1*(E/(1-2*M/r(t)))^2);
```

$$pot_2 := \frac{2M - r(t) + E^2 r(t)}{r(t)}$$

```
> plot({subs({E=0.5,M=1,r(t)=r},pot_2),0*r},r=
1.7..3,axes=boxed,color=[red,blue],title=`(dr/dtau)^2 vs
r`);
```



Die kollabierte Oberfläche kreuzt den Gravitationsradius bei einem endlichen

Zeitmoment. Es ist:  $\lim_{r \rightarrow R_g} \frac{\partial}{\partial t} r = 1$  das ist die Lichtgeschwindigkeit, im Falle  $E = 1$ , was wiederum  $R = \infty$  entspricht. Die Zeit oder Uhr des sich im Kollaps befindlichen Beobachters verläuft:

```
> hlp:=Int(1/sqrt(R/r-1),r)/sqrt(1-E^2);
simplify( value(hlp), radical, symbolic);
```

$$hlp := \frac{1}{\sqrt{1-E^2}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{R}{r}-1}} dr$$

$$\frac{1}{2} \frac{-2\sqrt{-(-R+r)r} + R \arctan\left(\frac{-R+2r}{2\sqrt{-(-R+r)r}}\right)}{\sqrt{1-E^2}}$$

Es ist für den etwas erfahreneren Physiker klar, daß obiges Integral gleichzusetzen ist wie hier gezeigt:

$$\frac{1}{\sqrt{1-E^2}} \int_r^R \frac{1}{\sqrt{\frac{R}{r}-1}} dr = \frac{\pi R}{\sqrt{1-E^2}} = \frac{\pi M}{(1-E^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

Nun ist es ja hinreichend bekannt, daß Sterne durch ihre atomaren Prozesse leben. Jedoch wenn dieser Prozess beendet ist, wird der vom atomaren Prozess stammende innere Druck dem oben gezeigten äußeren Druck nachgeben: der Stern beginnt zu implodieren. Der Fall der äußeren Staubhülle auf die Sternoberfläche kann nur aufgehalten werden durch baryonischen Druck oder durch Druck der Elektronen. Der Gleichgewichtszustand wird bestimmt durch das Minimum der Gravitationsenergie

$-\frac{G M^2}{R}$  und die thermisch bedingten kinetischen Energie des Zerfalls. Nehmen wir einen Wasserstoffball an. Sinkt die Temperatur auf den Nullpunkt, heißt das nicht gleichzeitig, daß die kinetische Energie der Elektronen auch Null ist! Da steht die Quantenphysik noch dazwischen! Ein Elektron besitzt ein "Zellvolumen" proportional

$\lambda^3$ , wobei  $\lambda = \frac{h}{2\pi p_e}$  die Compton Wellenlänge ist.  $p_e$  ist das Elektron Moment. Für nicht relativistische Elektronen gilt:

- E[e] kinetische Energie des Elektrons
- E[k] gesamte kinetische Energie, n[e] ist die Anzahl der Elektronen
- m[p] Masse des Protons, Annahme: m[e] >> m[p]
- E[g] Gravitations Energie
- E Gesamt Energie

```
> E[e] := p[e]^2/m[e];
E[k] := simplify( n[e]*R^3*subs( p[e]=h*n[e]^(1/3)/(2
*pi),E[e] ) );
E[k] := subs( n[e]=M/R^3/m[p],%);
E[g] := -G*M^2/R;
E := E[g] + E[k];
```

$$E_e := \frac{p_e^2}{m_e}$$

$$E_k := \frac{1}{4} \frac{n_e^{(5/3)} R^3 h^2}{\pi^2 m_e}$$

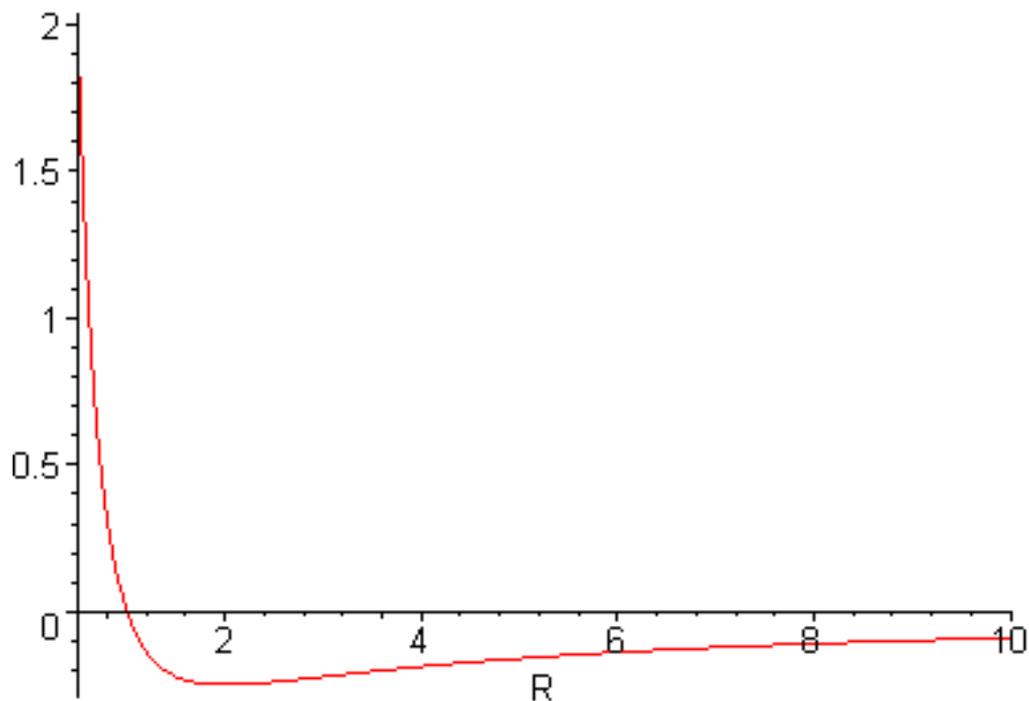
$$E_k := \frac{1}{4} \frac{\left( \frac{M}{R^3 m_p} \right)^{(5/3)} R^3 h^2}{\pi^2 m_e}$$

$$E := -\frac{GM^2}{R} + \frac{1}{4} \frac{\left( \frac{M}{R^3 m_p} \right)^{(5/3)} R^3 h^2}{\pi^2 m_e}$$

Berechnung der Energieabhängigkeit vom Abstand R

```
> pot := -1/R+1/R^2:
plot(pot,R=0.5..10, title=`Energie des zerfallenden
Sterns`);
```

Energie des zerfallenden Sterns



Es wird in diesem Plot verdeutlicht, daß die Energieabhängigkeit vom Radius ein Minimum hat. Damit zeigt sich auch deutlich daß es einen Gleichgewichtszustand geben muß. Sonst würde die Kurve stetig fallen!

Energieminimum in Abhängigkeit des Gleichgewichtszustands:

```
> E_min:=solve( diff(E, R) = 0, R);
```

$$E_{\min} := \frac{1}{2} \frac{(M^2 m_p)^{(1/3)} h^2}{M m_p^2 \pi^2 m_e G}, \frac{1}{2} \frac{\left( \frac{1}{2} \frac{(M^2 m_p)^{(1/3)}}{M m_p} + \frac{1}{2} I \sqrt{3} \frac{(M^2 m_p)^{(1/3)}}{M m_p} \right) h^2}{\pi^2 m_p m_e G},$$

$$\frac{1}{2} \frac{\left( \frac{1}{2} \frac{(M^2 m_p)^{(1/3)}}{M m_p} - \frac{1}{2} I \sqrt{3} \frac{(M^2 m_p)^{(1/3)}}{M m_p} \right) h^2}{\pi^2 m_p m_e G}$$

Der Gleichgewichtszustand wird erreicht bei  $R_{\min} \sim \frac{h^2}{G M^{(1/3)} m_e m_p^{(5/3)}}$  und der Stern, welcher in diesem Gleichgewichtszustand noch eine Weile verharrt wird weiter zerfallen, wenn auch dieser den Gleichgewichtszustand erhaltende atomare Prozess erlischt. Der Stern wird sehr sicher als Weißer Zwerg enden. Der Wert seiner Dichte in diesem Zustand ist dann:

> **equilib\_num\_density:=simplify( subs( R[min]=h^2/(G\*M^(1/3)\*m[e]\*m[p]^(5/3)), n[e]=M/R[min]^3/m[p] ) );**

$$\text{equilib\_num\_density} := n_e = \frac{M^2 G^3 m_e^3 m_p^4}{h^6}$$

Haben wir es mit einem massereicheren Stern zu tun, wird auch der Radius des Gleichgewichtszustands geringer werden. Das widerspricht dem einfachen Wassertropfen Modell! Im Zusammenhang mit dem Unschärfepinzipp wird das Moment des Elektrons größer werden:

$$p_e n_e^{(-1/3)} \sim h.$$

Die nichtrelativistische Annahme impliziert:  $p_e \ll m_e c$

> **hlp:=simplify( rhs(%)^(1/3)\*h ) - c\*m[e];**  
> **solve(hlp=0,M);**

$$hlp := \left( \frac{M^2 G^3 m_e^3 m_p^4}{h^6} \right)^{(1/3)} h - c m_e$$

$$\frac{\sqrt{G c h h c}}{G^2 m_p^2}, - \frac{\sqrt{G c h h c}}{G^2 m_p^2}$$

Das letzte Ergebnis zeigt das nichtrelativistische Massenkriterium:

$$M \ll \frac{(h c)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{m_p^2 G^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

Damit überhaupt ein Kollaps zu einem weißen Zwerg führen kann, wird demnach hier gefordert:

**Wir brauchen relativistische Partikel!!!**

Dann schau wir mal:

E[e]            kinetische Energie   E= pc für relativistische Partikel  
 E[k]            gesamte kinetische Energie, n[e] ist die Anzahl der Partikel  
 m[p]            Masse des Protons, Annahme: m[e] >> m[p]  
 E[g]            Gravitations Energie  
 E                Gesamt Energie zeigt die Abhängigkeit -a/R+b/R  
 E\_hlp\_num    hier zeigt sich keine Abhängigkeit von R! Deshalb gibt es keine stabile Konfiguration mit einem Energieminimum

```
> E[e] := h*c*n[e]^(1/3);
E[k] := simplify( n[e]*R^3*E[e] );
E[k] := subs( n[e]=M/R^3/m[p],%);
E[g] := -G*M^2/R;
E := E[g] + E[k];
E_hlp:=simplify( diff(E, R), radical );
E_hlp_num:=numer(E_hlp);
Extremata:=solve(E_hlp_num =0, M );
```

$$E_e := h c n_e^{(1/3)}$$

$$E_k := n_e^{(4/3)} R^3 h c$$

$$E_k := \left( \frac{M}{R^3 m_p} \right)^{(4/3)} R^3 h c$$

$$E := -\frac{G M^2}{R} + \left( \frac{M}{R^3 m_p} \right)^{(4/3)} R^3 h c$$

$$E_{\text{hlp\_num}} := - \left( -G M m_p + \left( \frac{M}{R^3 m_p} \right)^{(1/3)} h c R \right) M$$

$$\text{Extremata} := 0, \frac{\sqrt{G c h h c}}{G^2 m_p^2}, - \frac{\sqrt{G c h h c}}{G^2 m_p^2}$$

Wir erhielten die Beziehung für die kritische Masse  $M_c \sim m_p^2 G^{\left(\frac{3}{2}\right)} (h c)^{\left(\frac{3}{2}\right)} = 1.4 M_{\text{sun}}$   
 Diese wird auch **Chandrasekhar** Grenze für Weiße Zwerge genannt. Geringere Massen führen zu Weißen Zwergen mit nicht-relativistischen Elektronen, während größere Massen einen Sternkollaps verursachen, der nicht durch den Druck entarteter Elektronen aufgefangen werden kann.

**Solche massereichen Sterne kollabieren dann zum Neutronenstern.**

Für diese Massen gilt etwa:  $1.4 M_{\text{sun}} < M < 3 M_{\text{sun}}$  .

**Sterne noch größerer Massen kollabieren zu Schwarzen Löchern**

Literatur:

- <http://de.wikipedia.org/wiki/Sternentstehung>
- <http://www.zum.de/Faecher/A/Sa/STERNE/st1.htm>
- [http://de.wikipedia.org/wiki/Wei%C3%9Fer\\_Zwerg](http://de.wikipedia.org/wiki/Wei%C3%9Fer_Zwerg)
- <http://german.therfcc.org/wei%C3%83%C5%B8er-zwerg-379360.html>
- <http://german.therfcc.org/wei%C3%83%C5%B8er-zwerg-379360.html>

**Schwarzschild Schwarzes Loch**

Kehren wir zurück zur Schwarzschild Metrik

> **get\_compts(sch);**

$$\begin{bmatrix} -1 + \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

Es gibt wohl 2 Singularitäten bei  $r=2M$  und  $r=0$ . Die Frage nach dem Sinn der Ersten stellt sich. Wenn wir den Ereignishorizont  $sh_{1,1}$  sowie  $sh_{2,2}$  das heißt auch:  $g_{0,0}$  und  $g_{1,1}$  überqueren dann ändert sich das Vorzeichen.

**Diese Vorzeichenänderung bedeutet: Der Raum und die Zeit tauschen sich aus!**

Sollte ein Körper oder auch eine Information, ein Signal diesen Gravitationsradius überqueren, so gibt es kein entkommen! Der Fall in die Singularität ist nicht umkehrbar, ebensowenig der Fluß der Zeit. Bei  $r=2M$ , das entspricht tensoriell

$$\frac{(\Gamma^\alpha)_{0,0}}{g_{0,0}}$$

dargestellt  $g_{0,0}$  ( $\Gamma$  stellen die Christoffel Symbole dar ...immer dran denken: Die Diagonalen der Matrix werden mit 1 besetzt), geht die Beschleunigung gegen unendlich.

Jetzt werde ich immer wieder mal den Standpunkt wechseln. Wir begeben uns weit weit weg vom Geschehen und beobachten von dort oder: Wir sind mitten im Geschehen drin und erzählen, was wir dort erleben

```
> Dlsch := dlmatrix( sch, coord );
Cf1 := Christoffel ( Dlsch );
displayGR(Christoffel1,%);
```

*The Christoffel Symbols of the First Kind*

*non-zero components :*

$$[11,2] = \frac{M}{r^2}$$

$$[12,1] = -\frac{M}{r^2}$$

$$[22,2] = -\frac{M}{(r-2M)^2}$$

$$[23,3] = r$$

$$[24,4] = r \sin(\theta)^2$$

$$[33,2] = -r$$

$$[34,4] = r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$[44,2] = -r \sin(\theta)^2$$

$$[44,3] = -r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

Die radial Komponenten der Beschleunigung werden:

```
> -get_compts(Cf1)[1,1,2]/get_compts(sch)[1,1];
```

$$-\frac{M}{r^2 \left( -1 + \frac{2M}{r} \right)}$$

**Partikel, welche in diesen Radius eindringen werden vom Ursachen-Wirkungs Mechanismus des Universums ausgeklammert.**

Deswegen nennt man diese magische Grenze auch Ereignishorizont in English: event horizon.

Das Fehlen oder nicht Vorhandensein einer wirklichen Singularität bei  $r=R_g$  kann folgenderweise gezeigt werden:

Für den invariante Riemann Tensor gilt:

$$R_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} R^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta)}$$

Mit "raise" werden die kontravarianten Indices des Riemann Tensor erhöht. Ich gehe auf diese Indexmanipulationen nicht tiefer ein. Das wäre eine eigene Vorlesung über Tensoralgebra. Ist auch, denke ich, nicht allzu wichtig das wirklich zu verstehen. Nehmt es "einfach" mal hin. Wichtig ist, daß die unten begonnene Prozedur standardmäßig im Fortschritt des Aufsatzes für die verschiedenen Lösungen verwendet wird.

Literatur zur Tensor Indexbehandlung:

<http://baldufa.upc.es/xjaen/ttc/tutorial/inde.htm>

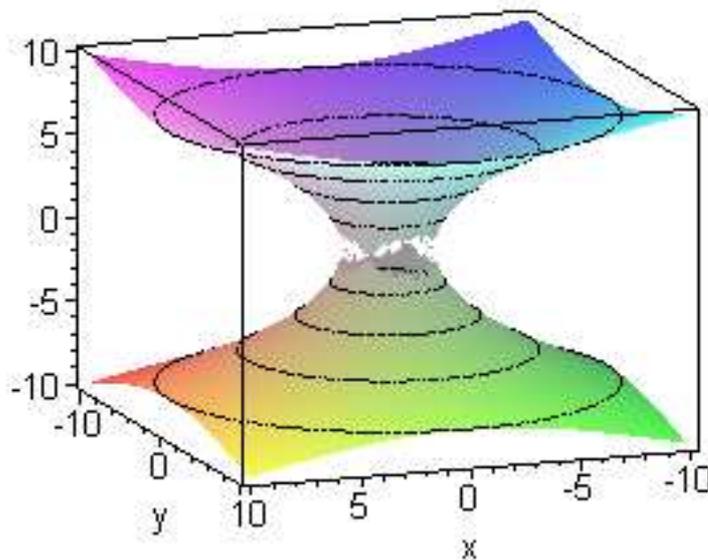
```
> schinv := invert( sch, 'detg' ):
D2sch := d2metric( D1sch, coord ):
Cf1 := Christoffel ( D1sch ):
RMN := Riemann( schinv, D2sch, Cf1 ):
raise(schinv, RMN, 1):
raise(schinv, %, 2):
raise(schinv, %, 3):
RMNinv := raise(schinv, %, 4):
prod(RMN, RMNinv, [1,1], [2,2], [3,3], [4,4]);
table([compts =  $\frac{48 M^2}{r^6}$ , index_char = [ ]])
```

..und besitzt keine Singularität an seinem Horizont. Dies ist eine einfache Koordinaten Singularität und ihr Sinn ist, daß es innerhalb des Horizonts keinerlei starre Koordinaten mehr gibt. Eine wirkliche Singularität ergibt sich bei  $r=0$  und hat den Charakter einer Raum-ähnlichen Singularität. Darunter wird eine unabwendbare Singularität für einen Beobachter, der den Ereignishorizont überquer. Nun wird versucht, ob es gelingt einen Augenblicks Äquator Abschnitt des gekrümmten Raums auf den nicht gekrümmten Raum abzubilden.

```
> z(r)[1] = int(sqrt(2*r*M-4*M^2)/(-r+2*M),r);
z(r)[2] = int(-sqrt(2*r*M-4*M^2)/(-r+2*M),r);
z(r)_1 = -2*sqrt(2*r*M-4*M^2)
```

$$z(r)_2 = 2\sqrt{2rM - 4M^2}$$

```
> plot3d({subs({M=1,r=sqrt(x^2+y^2)},rhs(%)),subs({M=
1,r=sqrt(x^2+y^2)},rhs(%))},x=-10..10,y=-
10..10,axes=boxed,style=PATCHCONTOUR,grid=
[100,100],title=`Schwarzes Loch Schwarzschild Typ`);
Schwarzes Loch Schwarzschild Typ
```



Dies ist ein Schwarzes Loch mit einer Einschnürung, genannt **Einstein-Rosen Brücke**. Der innere sowie der äußere Weg zum Ereignishorizont sind die Wege zwischen verschiedenartigen aber identisch asymptotisch flachen Universen. Diese Brücke bezeichnet man im Film "Stargate" als Wurmloch. Dort wird das aber völlig falsch behandelt...ist ja auch nur ein netter Film!! Auf alle Fälle hat "unser" Wurmloch einen minimal Radius von "N. Man sollte jedoch bedenken, daß dieses Gebilde statisch nicht stabil ist, denn im Übergang von t nach t + dt ist hier keine Zeit Verschiebung vorhanden.

Wir wollen nun diese erwähnte Koordinaten Singularität loswerden. Das wollen wir mit Hilfe einer Koordinatentransformation erreichen. Beispielsweise können wir die Null Geodäte  $ds^2 = 0$  in der Schwarzschild Raumzeit als Radial Bewegung eines Lichtphotons mit

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_g}{r}\right)^2} \quad \text{ansehen..}$$

```
> t = combine( int(-1/(1-R[g]/r),r) );
              t = -r - R_g ln(r - R_g)
```

Wenn v die Konstante ist, welche die radial Komponente für eine feste Zeit t beschreibt, kann man anschreiben: Hiermit kann man den Ausdruck für  $r < R[g]$  erweitern

```
> t = -r - R[g]*ln( abs(-r/R[g]+1) ) + v;
              t = -r - R_g ln( | r/R_g - 1 | ) + v
```

t wird differenziert unter Berücksichtigung der oben erwähnten Erweiterung (Substitution) nach  $dt^2$ . Der Ausdruck für das Intervall in der Schwarzschild Metrik wird dann:

$d(r)^2$  zeigt das Differential in den neuen Koordinaten

```
> deform(f=0,w1=1,w2=1,w3=1,v=1,R[g]=0,r=0,v=0);
d(t)^2 = expand( subs( d(R[g])=0,d( -r-R[g]*ln( r/R[g]-1
)+v ) )^2 );
hlp:=subs( d(t)^2=rhs(%),sch_compts[1,1]*d(t)^2 ) +
sch_compts[2,2]*d(r)^2 + sch_compts[3,3]*d(theta)^2 +
sch_compts[4,4]*d(phi)^2:
new_metric:=collect( simplify( subs(R[g]=2*M,hlp) ),{d(r)
^2,d(v)^2});
```

$$d(t)^2 = \frac{r^2 d(r)^2}{(r - R_g)^2} - \frac{2 r d(r) d(v)}{r - R_g} + d(v)^2$$

$$new\_metric := 2 d(v) d(r) + \frac{(-r + 2 M) d(v)^2}{r} + \frac{r^3 d(\theta)^2 + r^3 d(\phi)^2 - r^3 d(\phi)^2 \cos(\theta)}{r}$$

Wir haben damit ein neues ineares Element erhalten. Das ist als Eddington-Finkelstein Koordinate bekannt.

$ds^2 = - \left( 1 - \frac{R_g}{r} \right) dV^2 + 2dvdr + r^2 d(\Omega)^2$  ist der spärische Anteil.

Die zugehörige Metrik hat in der Umgebung von r regulären Charakter, Ausnahme bei  $r=0$ . Zusammenfassend nehmen wir an, daß eine Abweichung von der sphärischen Symmetrie für statische Schwarze Löcher verbleibt. Eine solche Abweichung kann beschrieben werden mit Hilfe des Quadrupol Moments q.

Erez und Rosen haben die zugehörige Metrik mit axialer Symmetrie gefunden.

Literatur;

[http://www.osti.gov/energycitations/product.biblio.jsp?osti\\_id=6825325](http://www.osti.gov/energycitations/product.biblio.jsp?osti_id=6825325)

er\_compt                    Metrische Komponenten  
er\_compts[1,1]            Koeffizienten von d(lambda)^2 im Interval  
er\_compts[2,2]            Koeffizienten von d(mu)^2 im Interval  
er\_compts[3,3]            Koeffizienten von d(phi)^2 im Interval  
er\_compts[4,4]            Axial symmetrische Metrik nach Erez-Rosen  
er                            Axial symmetrische metrik

```
> coord := [t, lambda, mu, phi]:
er_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4):
er_compts[1,1] := -exp(2*psi):# coefficient of d(t)^2 in
interval
er_compts[2,2] := M^2*exp(2*gamma-2*psi)*(lambda^2-mu^2)/
(lambda^2-1):
er_compts[3,3] := M^2*exp(2*gamma-2*psi)*(lambda^2-mu^2)/
(1-mu^2):
er_compts[4,4] := M^2*exp(-2*psi)*(lambda^2-1)*(1-mu^2):
er := create([-1,-1], eval(er_compts));
```

```
er := table([compts =
```

$\begin{bmatrix} -e^{(2\psi)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M^2 e^{(2\gamma-2\psi)} (\lambda^2 - \mu^2)}{\lambda^2 - 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M^2 e^{(2\gamma-2\psi)} (\lambda^2 - \mu^2)}{1 - \mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M^2 e^{(-2\psi)} (\lambda^2 - 1) (1 - \mu^2) \end{bmatrix}$	, index_char = [-1, -1]]
--	--------------------------

mit

```
> f1 := psi = 1/2*( (1+q*(3*lambda^2-1)*(3*mu^2-1)/4)*ln
((lambda-1)/(lambda+1))+3/2*q*lambda*(3*mu^2-1) );
f2 := gamma = 1/2*(1+q+q^2)*ln((lambda^2-1)/(lambda^2-mu^
2))-3/2*q*(1-mu^2)*(lambda*ln((lambda-1)/(lambda+1))+2)+
9/4*q^2*(1-mu^2)*( (lambda^2+mu^2-1-9*lambda^2*mu^2)*
(lambda^2-1)/16*ln((lambda-1)/(lambda+1))^2+(lambda^2+7
*mu^2-5/3-9*mu^2*lambda^2)*lambda*ln((lambda-1)/(lambda+
1))/4+1/4*lambda^2*(1-9*mu^2)+(mu^2-1/3) );
f3 := lambda = r/M-1;
f4 := mu = cos(theta);
```

$$f1 := \psi = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{q(3\lambda^2-1)(3\mu^2-1)}{4} \right) \ln \left( \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \right) + \frac{3q\lambda(3\mu^2-1)}{4}$$

$$f2 := \gamma = \frac{1}{2} (1 + q + q^2) \ln\left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - \mu^2}\right) - \frac{3}{2} q (1 - \mu^2) \left( \lambda \ln\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right) + 2 \right) + \frac{9}{4} q^2 (1 - \mu^2) \\ \frac{1}{16} (\lambda^2 + \mu^2 - 1 - 9 \lambda^2 \mu^2) (\lambda^2 - 1) \ln\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right)^2$$

$$+ \frac{1}{4} \left( \lambda^2 + 7 \mu^2 - \frac{5}{3} - 9 \lambda^2 \mu^2 \right) \lambda \ln\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right) + \frac{\lambda^2 (1 - 9 \mu^2)}{4} + \mu^2 - \frac{1}{3}$$

$$f3 := \lambda = \frac{r}{M} - 1$$

$$f4 := \mu = \cos(\theta)$$

Im Fall  $q=0$  wir erhalten

```
> get_compts(er):
hlp_1:=map2(subs,{psi=rhs(f1),gamma=rhs(f2)},%):
hlp_2:=map2(subs,q=0,hlp_1):
hlp_3:=map2(subs,{lambda=rhs(f3),mu=rhs(f4)},hlp_2):
erg:=map(simplify,hlp_3);
```

$$erg := \begin{bmatrix} -\frac{r-2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{rM^2}{r-2M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{\sin(\theta)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

Das beschreibt die Schwarzschild Metrik unter Berücksichtigung von f3 und f4. Jetzt gilt es noch den Ereignishorizont als nicht Null Fall des quadruple Moments zu

finden. Für das statische Feld  $\frac{\partial}{\partial t} g_{\alpha,\beta} = 0$  ist die korrespondierende Bedingung:  
 $g_{0,0} = 0$ . Damit folgt:

```
> hlp_1:=map2(subs,psi=rhs(f1),er):
er2 := map2(subs,gamma=rhs(f2),hlp_1):
r_krumm_invari:=get_compts(er2)[1,1];
```

$$r\_krumm\_invari := -e^{\left( \left( 1 + \frac{q(3\lambda^2 - 1)(3\mu^2 - 1)}{4} \right) \ln \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) + \frac{3q\lambda(3\mu^2 - 1)}{2} \right)}$$

Das entspricht  $r = 2M (\lambda = 1)$ . Jedoch ist das Ergebnis für invariante Krümmung:

```
> erinv := invert( er2, 'detg' ):
Dler := d1metric( er2, coord ):
D2er := d2metric( Dler, coord ):
Cf1 := Christoffel( Dler ):
RMN := Riemann( erinv, D2er, Cf1 ):
raise( erinv, RMN, 1):           Raufziehen der Indizes im
Riemann Tensor
raise( erinv, %, 2):
raise( erinv, %, 3):
RMNinv := raise( erinv, %, 4):
prod( RMN, RMNinv, [1,1], [2,2], [3,3], [4,4] ):
get_compts( % ):
series( %, q=0, 2):           Reihenentwicklung q
convert( %, polynom ):
res := simplify( % ):

```

Im sphärischen Fall ergibt sich dann: erg\_fac das ist  $48M^2/r^6$

```
> fac := factor( subs( q=0, res ) ):
erg_sph := subs( lambda=1, fac );
erg_sph :=  $\frac{3}{4M^4}$ 
```

Es gibt also keine Singularität. Anwendung von L'Hospital's Regel für den Grenzwert:

```
> hlp := subs( mu=0, res ):
grenze_Zähler := limit( diff( numer( hlp ), lambda ), lambda=1 );
grenze_Nenner := limit( diff( denom( hlp ), lambda ), lambda=1 );
grenze_Zähler := -signum( q ) ∞
grenze_Nenner :=  $64M^4$ 
```

Also doch: es ist eine wirkliche Singularität am Ereignishorizont vorhanden, die hinsichtlich der Demonstration der Unmöglichkeit der statisch axialen symmetrischen Schwarzen Löchern mit einem nicht Null quadrupolem Moment beachtet werden muß. Jedoch werden solche Momente durch die Gravitationswellen während der Entstehung eines solchen Schwarzen Loches offensichtlich "weggespült".

***Reissner-Nordstrom Schwarzes Loch oder das geladene Schwarze Loch***

Die Verallgemeinerung der Schwarzschild Metrik im Falle der spherisch symmetrischen Vakuum Lösung der verbundenen Einstein-Maxwell Gleichungen kann folgendermaßen dargestellt werden:

rn_compts	Metrische Komponenten
rn_compts[1,1]	Koeffizienten von d(t)^2 im Intervall
rn_compts[2,2]	Koeffizienten von d(r)^2 im Intervall
rn_compts[3,3]	Koeffizienten von d(theta)^2 im Intervall
rn_compts[4,4]	Koeffizienten von d(phi)^2 im Intervall
rn	Reissner-Nordstrom (RN) Metrik

```
> coord := [t, r, theta, phi]:
rn_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4):
rn_compts[1,1] := -(1-2*M/r+Q^2/r^2):
rn_compts[2,2] := 1/(1-2*M/r+Q^2/r^2):
rn_compts[3,3]:=g_matrix[3,3]:
rn_compts[4,4]:=g_matrix[4,4]:
rn := create([-1,-1], eval(rn_compts));
```

$$rn := \text{table}(\text{compts} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix},$$

```
index_char = [-1, -1]
])
```

Q ist die elektrische Ladung, Die Metrik hat 3 Singularitäten: r=0, r\_p und r\_n

```
> extrem := denom(get_compts(rn)[2,2]) = 0;
r_p := solve(extrem, r)[1];
r_n := solve(extrem, r)[2];
```

$$\text{extrem} := r^2 - 2 r M + Q^2 = 0$$

$$r_p := M + \sqrt{M^2 - Q^2}$$

$$r_n := M - \sqrt{M^2 - Q^2}$$

Wir berechnen die Invarianz der Krümmung ... der Riemann Tensor beschreibt die Krümmung

```

> rninv := invert( rn, 'detg' );
D1rn := d1metric( rn, coord );
D2rn := d2metric( D1rn, coord );
Cf1 := Christoffel ( D1rn );
RMN := Riemann( rninv, D2rn, Cf1 );
raise(rninv,RMN,1):      Hochziehen der Indizes im Riemann Tensor
raise(rninv,%,2):
raise(rninv,%,3):
RMNinv := raise(rninv,%,4):
prod(RMN,RMNinv,[1,1],[2,2],[3,3],[4,4]);
table([compts =  $\frac{8(6r^2M^2 - 12rMQ^2 + 7Q^4)}{r^8}$ , index_char = [ ]])

```

Nichtphysikalische Wurzel des Zählers mit nicht-Null Komponente der Ladung Q

```

> loes_r := solve(get_compts(%), r);

```

$$loes_r := \frac{\left(1 + \frac{1}{6}I\sqrt{6}\right)Q^2}{M}, \frac{\left(1 - \frac{1}{6}I\sqrt{6}\right)Q^2}{M}$$

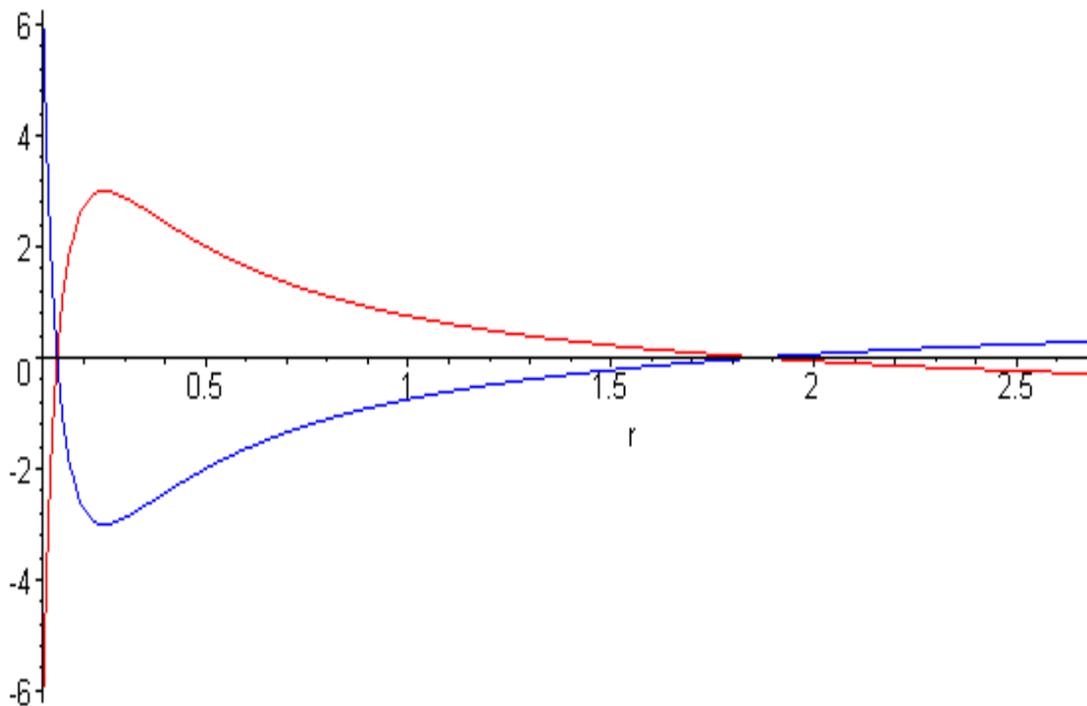
So sieht es aus: eine Singularität aus der Schwarzschild Metrik, die anderen beiden als "Augenblicks-Singularitäten" mit Koordinaten Charakter. Wir schauen uns das mal in einem Bild an: Dazu plotten wir die Ergebnisse der ersten beiden Terme der linearen Näherung so. Zur weiteren Verdeutlichung plotten wir den inversen Wert des zweiten Terms, um die Divergenz wegen der Koordinatensingularität zu umgehen.

```

> plot( {subs( {M=1, Q=1/2}, get_compts(rn)[1,1]), \
subs( {M=1, Q=1/2}, 1/get_compts(rn)[2,2])}, \
r=0.1..3, color=[red,blue], title=`Werte der ersten (rot)
und zweiten (blau) Terms der linearen Näherung`);

```

Werte der ersten (rot) und zweiten (blau) Terms der linearen Näherung



Dieser radiale Unterschied zum Schwarzschild Schwarzen Lochs ist so schön zu sehen. Wir sehen bei ca. "0.1" , daß sich Raum und Zeit austauschen. Das passiert in der region, in welcher gilt:  $r_n < r < r_p$  zwischen dem inneren und äußeren Ereignishorizont, der roten und blauen Linie. Quasi kann die positive Achse als Raum, die negative Achse als Zeit angesehen werden. Trotzdem gibt es die bekannte Anzeichen eines gewissen Zeitcharakters, so daß der ins Schwarze loch fallende Beobachter (der Ärmste!!) diese Singularität nicht erlebt. Wenn er nicht dabei "vor die Hunde" geht, wird er "in der Zeit" stetig langsamer und in unendlich Jahren bleibt für diesen Beobachter die Zeit "einfach" stehen. Ein externer, weit entfernter Beobachter sieht jedoch seinen Kollegen verschwinden.

Die nächste Unterschied ist das Ausbleiben der Koordinaten Singularität wenn:  $M^2 < Q^2$  . Das wird auch "nackte" Singularität genannt. Man kann sogar zeigen, daß hier wirklich keine solche Singularität als Ergebnis des normalen Zusammenbruchs des Sterns mit Masse  $M$  sowie Ladung  $Q$  auftritt. Die Gesamtenergie -als Newton Grenze, jedoch mit Korrektur aus der speziellen Relativität, mit  $M_0$  als Ruhemasse, ist: Die geometrischen Einheiten der Ladung werden ausgenutzt, so daß das Coulomb Gesetz  $G Q_1 Q_2/r^2$  erfüllt wird.

```
> en := M(r) = M_0 + Q^2/r - M(r)^2/r;
loes := solve(en,M(r));
```

$$en := M(r) = M_0 + \frac{Q^2}{r} - \frac{M(r)^2}{r}$$

$$loes := -\frac{r}{2} + \frac{\sqrt{r^2 + 4 M_0 r + 4 Q^2}}{2}, -\frac{r}{2} - \frac{\sqrt{r^2 + 4 M_0 r + 4 Q^2}}{2}$$

Die Wahl für die Lösung (loes) oben wird durch die Korrektur Asymptote bestimmt:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} sol = M_0:$$

```
> if limit(loes[1],r=infinity)=M_0 then true_loes := loes
[1] fi:
if limit(loes[2],r=infinity)=M_0 then true_loes := loes
[2] fi:
true_loes:=true_loes;
```

$$true\_loes := -\frac{r}{2} + \frac{\sqrt{r^2 + 4 M_0 r + 4 Q^2}}{2}$$

```
> hlp_1:=diff(true_loes,r):
hlp_2:=subs(M_0=solve(en,M_0),hlp_1):
M_0_erg:=simplify(hlp_2,radical,symbolic);
```

$$M_0\_erg := \frac{-Q^2 + M(r)^2}{(r + 2 M(r)) r}$$

$$\frac{d}{dr} M(r) = \frac{M(r)^2 - Q^2}{r(r + 2 M(r))}$$

Der Zusammenbruch ist möglich mit abnehmendem Abstand R. Damit gewinnt die Gravitation Oberhand über die Kraft oder Wirkung der Ladung. Das ist dann möglich, wenn  $M^2 > Q^2$  wird. Diese Grenze wird erreicht bei:

```
> M_limit:=limit(true_loes,r=0);
M_limit := \sqrt{Q^2}
```

Das löst das Problem der unendlichen Eigenenergie geladener Partikel. Mal sehen, wie sich der Druck des Zusammenbruchs der geladenen Sphäre verhält im Vergleich der Staubpartikel der Schwarzschild Metrik

d(s)^2            Reissner-Nordstrom (RN) Metrik  
d(tau)^2          tau ist die wirkliche Zeit, die für einen Beobachter auf der Oberfläche der Sphäre gilt  
subs({d(t)        dahinter steht an und für sich: d(t)/d(tau)=E/(1-2\*M/r+Q^2/r^2)  
pot\_1            Potential beim entfernten Beobachter  
pot\_2            Potential beim kollabierenden Beobachter

```
> r := 'r':
E := 'E':
subs( r=r(t),get_compts(rn) ):
d(s)^2 = %[1,1]*d(t)^2 + %[2,2]*d(r)^2;
d(tau)^2 = collect(subs( d(r)=diff(r(t),t)*d(t),rhs(%)
),d(t));
```

```

%/d(tau)^2;
subs({d(t)=E/(1-2*M/r(t)+Q^2/r^2),d(tau)=1},%);
pot_1 := factor( solve(%,(diff(r(t),t))^2) );
pot_2 := simplify(pot_1*(E/(1-2*M/r(t)+Q^2/r^2))^2):  d/d
(t)=(d/d(tau))*(1-2*M/r+Q^2/r^2)/E;

```

$$d(s)^2 = \left( -1 + \frac{2M}{r(t)} - \frac{Q^2}{r(t)^2} \right) d(t)^2 + \frac{d(r)^2}{1 - \frac{2M}{r(t)} + \frac{Q^2}{r(t)^2}}$$

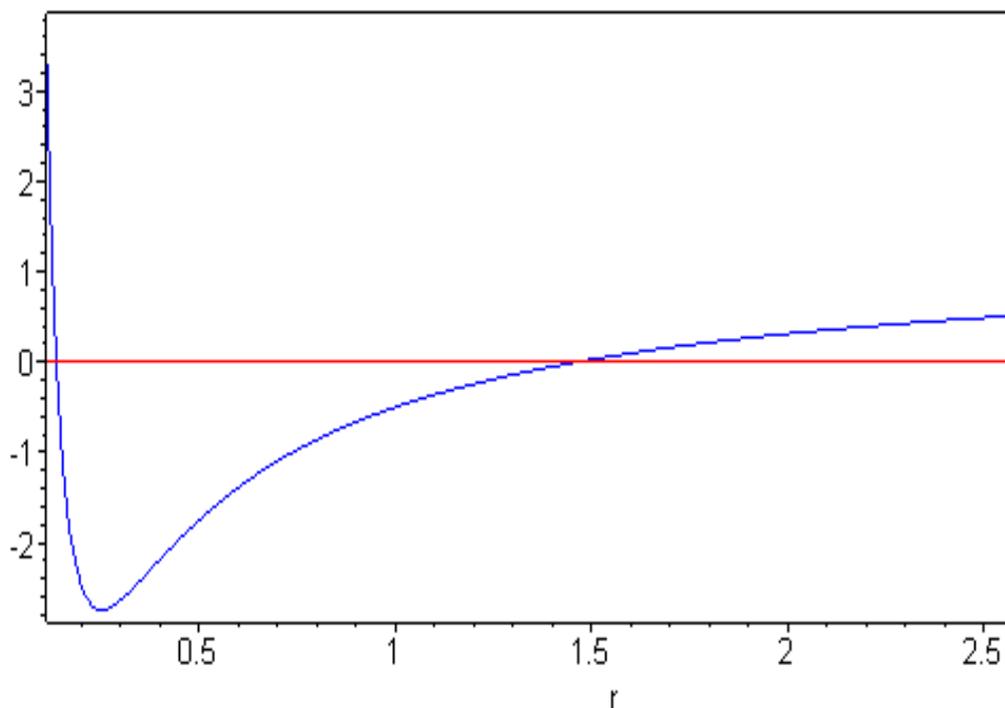
$$d \left( \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}} dr \right)^2 = \left( -1 + \frac{2M}{r(t)} - \frac{Q^2}{r(t)^2} + \frac{\left( \frac{d}{dt} r(t) \right)^2}{1 - \frac{2M}{r(t)} + \frac{Q^2}{r(t)^2}} \right) d(t)^2$$

$$1 = \frac{\left( -1 + \frac{2M}{r(t)} - \frac{Q^2}{r(t)^2} + \frac{\left( \frac{d}{dt} r(t) \right)^2}{1 - \frac{2M}{r(t)} + \frac{Q^2}{r(t)^2}} \right) d(t)^2}{d \left( \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}} dr \right)^2}$$

$$1 = \frac{\left( -1 + \frac{2M}{r(t)} - \frac{Q^2}{r(t)^2} + \frac{\left( \frac{d}{dt} r(t) \right)^2}{1 - \frac{2M}{r(t)} + \frac{Q^2}{r(t)^2}} \right) E^2}{\left( 1 - \frac{2M}{r(t)} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^2}$$

$$\frac{d}{d(t)} = \frac{d \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)}{d \left( \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}} dr \right) E}$$

```
> plot({subs({E=0.5,M=1,Q=1/2,r(t)=r},pot_2),0*r},r=
0.11..3,axes=boxed,color=[red,blue],
> title=`(dr/dtau)^2 und Potential bezogen auf r aus Sicht
des kollabierenden Beobachters`);
(dr/dtau)^2 und Potential bezogen auf r aus Sicht des kollabierenden Beobachters
```



Der Unterschied zum Schwarzschild Zusammenbruch ist offensichtlich: Der Beobachter kreuzt den äußeren sowie den inneren Ereignishorizont, jedoch wird er die Singularität nie erreichen, da der Zusammenbruch des Sterns als "Weißes Loch" passiert. Das begründet sich durch den Rückstrom mit direkt anschließender Kontraktion usw. Den Extremfall  $M^2 = Q^2$  erhalten wir bei:

```
> hlp:=subs(Q^2=M^2, get_compts(rn));
fac:=factor(hlp[1,1]);
```

$$hlp := \begin{bmatrix} -1 + \frac{2M}{r} - \frac{M^2}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{M^2}{r^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

$$fac := -\frac{(r-M)^2}{r^2}$$

Die Koordinaten Singularität erkennen wir bei  $r=M$ . Was passiert nun mit dem zweiten Ereignishorizont? Dazu müssen wir den Abstand der beiden Horizonte ermitteln und die Zeit  $t$  sowie den Winkel der Koordinaten der Reissner-Nordstrom (RN) Metrik festlegen

Es gibt dazu 2 Möglichkeiten, dieses auszudrücken: entweder über die RN Metrik oder über die Abstände

> `get_compts(rn):`

`d(s)^2 = %[2,2]*d(r)^2;`

RN metric

or

`d(s)^2 = d(r)^2/expand( (1-r_p/r)*(1-r_n/r) );` Zweite Art:

Abstände

$$d(s)^2 = \frac{d(r)^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}$$

$$d(s)^2 = \frac{d(r)^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}$$

Es gilt bei  $r_p \rightarrow r_n (M^2 - Q^2 \rightarrow 0)$

$r_p$ : äußerer Ereignishorizont

$r_n$ : innerer Ereignishorizont

> `r_p := 'r_p':`

`r_n := 'r_n':`

`s = Int(1/sqrt((1-r_p/r)*(1-r_n/r)), r=r_n..r_p) ;`

```
simplify( value(rhs(%)),radical,symbolic );
```

$$s = \int_{r_n}^{r_p} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{r_p}{r}\right)\left(1 - \frac{r_n}{r}\right)}} dr$$

$$-\frac{1}{2} r_p \ln(-r_p + r_n) - \frac{1}{2} r_n \ln(-r_p + r_n) + \frac{1}{2} r_p \ln(r_p - r_n) + \frac{1}{2} r_n \ln(r_p - r_n)$$

Wir erhalten:  $s \rightarrow \infty$ . Das bedeutet, daß wir eine unendlich lange **Einstein-Rosen Brücke "Wormloch"** vorfinden. Damit entfällt hier die Vorstellung der Verbindung zweier flacher Universen. Diese Tatsache kann auch interpretiert werden als Einbettung in die äquatorial Sektion des statischen Reissner-Nordstrom Raums in einem flachen Euklidischen Universums.

Wir setzen gleich: Radial Elemente der Intervalle mit  $M=1$

```
> d(r)^2/(1-1/r)^2 = (1+diff(z(r),r)^2)*d(r)^2;
diff(z(r),r) = solve(%,diff(z(r),r))[1];
einbettung:=dsolve(%,z(r));
```

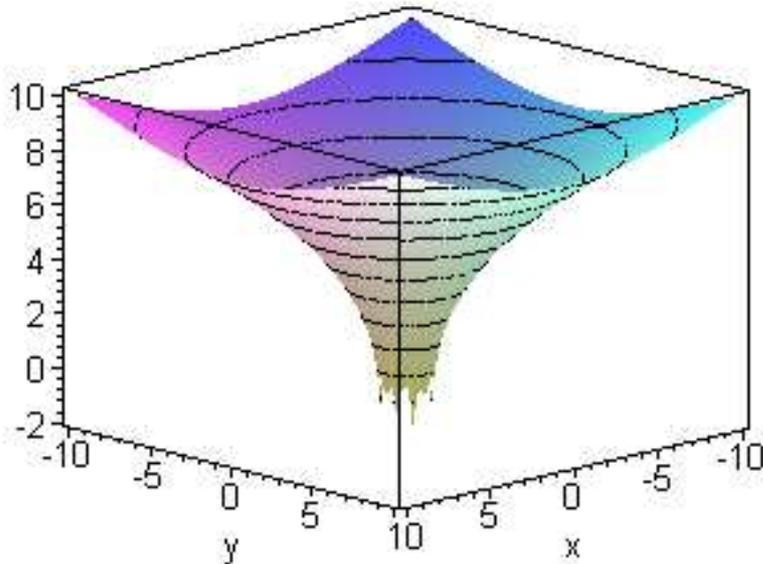
$$\frac{d(r)^2}{\left(1 - \frac{1}{r}\right)^2} = \left(1 + \left(\frac{d}{dr} z(r)\right)^2\right) d(r)^2$$

$$\frac{d}{dr} z(r) = \frac{\sqrt{2r-1}}{r-1}$$

```
einbettung:=z(r)=2*sqrt(2*r-1)+ln(sqrt(2*r-1)-1)-ln(sqrt(2*r-1)+1)+_C1
```

```
> plot3d(subs(r=sqrt(x^2+y^2),2*sqrt(2*r-1)+ln(sqrt(2*r-1)-1)-ln(sqrt(2*r-1)+1)),x=-10..10,y=-10..10,axes=boxed,style=PATCHCONTOUR,grid=[100,100],title=`Extremes Reissner-Nordstrom Schwarzes Loch`);
```

## Extremes Reissner-Nordstrom Schwarzes Loch



Das asymptotische Verhalten der RN Metrik  $r \rightarrow \infty$  entspricht der Minkowski Vorstellung des gekrümmten Raums. Zur Einführung dieser Vorstellung  $r \rightarrow M$ , werden wir neue Koordinaten brauchen.

Literatur:

<http://deposit.ddb.de/cgi-bin/dokserv?idn=973910429>

<http://www.pnas.org/cgi/content/abstract/83/7/1978>

<http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2004-9/articlesu20.html>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Reissner-Nordstrom-Metrik>

```
> rn_assym := subs( {r=M*(1+lambda), Q^2=M^2}, get_compts
(rn) );
```

$$rn\_assym := \begin{bmatrix} -1 + \frac{2}{\lambda+1} - \frac{1}{(\lambda+1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2}{\lambda+1} + \frac{1}{(\lambda+1)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & M^2 (\lambda+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & M^2 (\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$$

m1  
m2  
d(s)^2

Reihenentwicklung: nur der Hauptterm für lambda verbleibt wie m1

spheric\_part      d(omega) ist der sphärische Anteil

```
> m1 := series(rn_asymp[1,1],lambda=0,3);
m2 := series(rn_asymp[2,2],lambda=0,3);
spheric_part:=d(s)^2 = convert(m1,polynomial)*d(t)^2 +M^2
*convert(m2,polynomial)*d(lambda)^2 + M^2*d(Omega)^2;
m1 := -lambda^2 + O(lambda^3)
m2 := lambda^-2 + O(lambda^-1)
```

$$spheric\_part := d(s)^2 = -\lambda^2 d(t)^2 + \frac{M^2 d(\lambda)^2}{\lambda^2} + M^2 d(\Omega)^2$$

Diese Metrik heißt: **Robinson-Bertotti Metrik**. Der letzte Term beschreibt die 2-dimensionale Shäre mit Radius M. Die Dimensionen werden in der Umgebung des Ereignishorizonts zusammengestaucht.. Das entspricht durchaus der "anti-de Sitter" Raumzeitverhalten (kommt gleich) mit konstant negativer Krümmung.

Literatur:

<http://www.iop.org/EJ/abstract/0264-9381/17/2/314/>  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:hep-th/0306194>  
[http://www.osti.gov/energycitations/product.biblio.jsp?osti\\_id=20510506](http://www.osti.gov/energycitations/product.biblio.jsp?osti_id=20510506)  
[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1979\\_\\_31\\_4\\_355\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1979__31_4_355_0)

### ***Kerr Schwarzes Loch oder das Schwarze Loch mit Eigenrotation***

Die allgemeine Form der stationären Rotation eines Schwarzen Lochs wird mit der **Kerr-Newman Metrik** beschrieben. Darin werden **Boyer-Linquist Koordinaten** verwendet:

kn_compts	Metrische komponenten mit a=J/M J ist das Winkel Moment
kn_compts[1,1]	Koeffizienten von d(t)^2
kn_compts[1,4]	Koeffizienten von d(t)*dphi
kn_compts[2,2]	Koeffizienten von d(r)^2
kn_compts[3,3]	Koeffizienten von d(theta)^2
kn_compts[4,4]	Koeffizienten von d(phi)^2
kn	Kerr-Newman (KN) Metrik

Literatur:

<http://www.math.ucla.edu/~bon/kerr/intro4.html>  
<http://www.math.ucla.edu/~bon/kerr/intro4.html>  
<http://www.springerlink.com/content/t360068671453518/>  
<http://www.springerlink.com/content/rg03v7p7046555t2/>

```
> coord := [t, r, theta, phi]:
```

```

kn_compts :=
array(sparse,1..4,1..4):

kn_compts[1,1] :=
-(Delta-a^2*sin(theta)^2)/Sigma:

kn_compts[1,4] :=
-2*a*sin(theta)^2*(r^2+a^2-Delta)/Sigma:

kn_compts[2,2] :=
Sigma/Delta:

kn_compts[3,3] :=
Sigma:

kn_compts[4,4] :=
(((r^2+a^2)^2-Delta*a^2*sin(theta)^2)/Sigma)*sin(theta)^
2:

kn := create([-1,-1], eval(kn_compts));

```

mit P als *magnetische Monopol Ladung*

```

sub_1 := Sigma = r^2+a^2*cos(theta)^2;
sub_2 := Delta = r^2-2*M*r+a^2+sqrt(Q^2+P^2);

```

$$kn := create \left( [-1, -1], \begin{bmatrix} -\frac{\Delta - a^2 \sin(\theta)^2}{\Sigma} & 0 & 0 & -\frac{2 a \sin(\theta)^2 (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{((r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin(\theta)^2) \sin(\theta)^2}{\Sigma} \end{bmatrix} \right)$$

$$sub\_1 := \Sigma = r^2 + a^2 \cos(\theta)^2$$

$$sub\_2 := \Delta = r^2 - 2 M r + a^2 + \sqrt{Q^2 + P^2}$$

Sind keine Ladungen vorhanden, erhalten wir die Kerr metrik. Die Singularitäten sind mit Ausnahme der normalen Singularität bei der Koordinate  $s^\theta = 0$ :

r\_p: äußerer Ereignishorizont  
r\_n: innerer Ereignishorizont

```

> r_p := solve( subs({Q=0,P=0},rhs(sub_2))=0,r )[1];
r_n := solve( subs({Q=0,P=0},rhs(sub_2))=0,r )[2];

```

```
singularitaet:=solve( subs({Q=0,P=0},rhs(sub_1))=0,theta
);
```

$$r_p := M + \sqrt{M^2 - a^2}$$

$$r_n := M - \sqrt{M^2 - a^2}$$

$$singularitaet := \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsinh}\left(\frac{r}{a}\right)I, \frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsinh}\left(\frac{r}{a}\right)I$$

Die letzte Singularität wird bei  $r=0$  bzw.  $\theta = \frac{\pi}{2}$  auftreten. Wie bei dem Ladungs-Schwarzen Loch, erhalten wir verschiedene Situationen:

$$\begin{aligned} M^2 &< a^2 \\ M^2 &= a^2 \\ M^2 &> a^2 \end{aligned} .$$

Wir werden sehen was bei  $g_{0,0}$ ,  $g_{1,1}$ ,  $g_{4,4}$  das heißt bei Situation:  $M^2 > a^2$  passiert

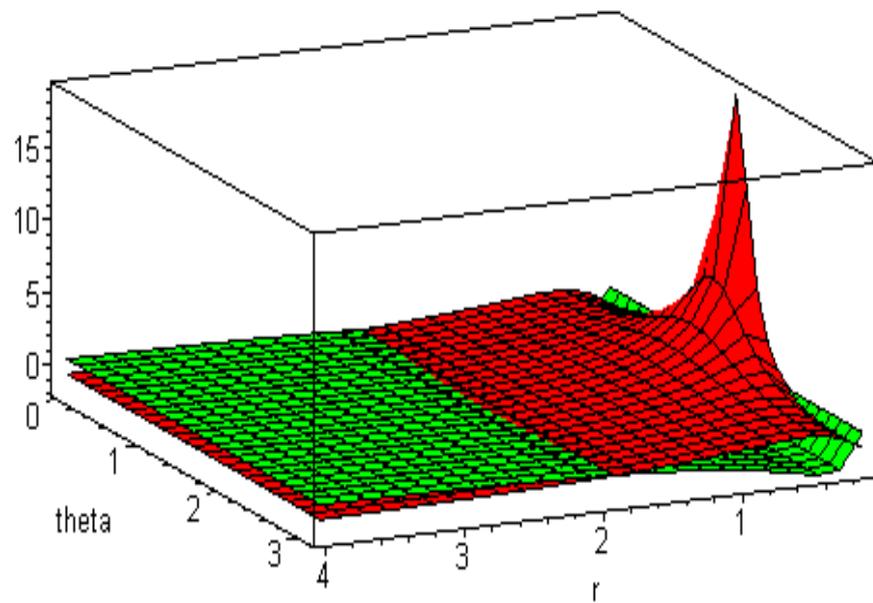
```
> plot3d(subs({M=1,a=1/2,P=0,Q=0},subs({Sigma=rhs(sub_
1),Delta=rhs(sub_2)},get_compts(kn)[1,1])),r=
0.1..4,theta=0..Pi,color=red):
```

```
plot3d(subs({M=1,a=1/2,P=0,Q=0,theta=2*Pi/3},subs
({Sigma=rhs(sub_1),Delta=rhs(sub_2)},1/get_compts(kn)
[2,2])),r=0.1..4,theta=0..Pi,color=green):
```

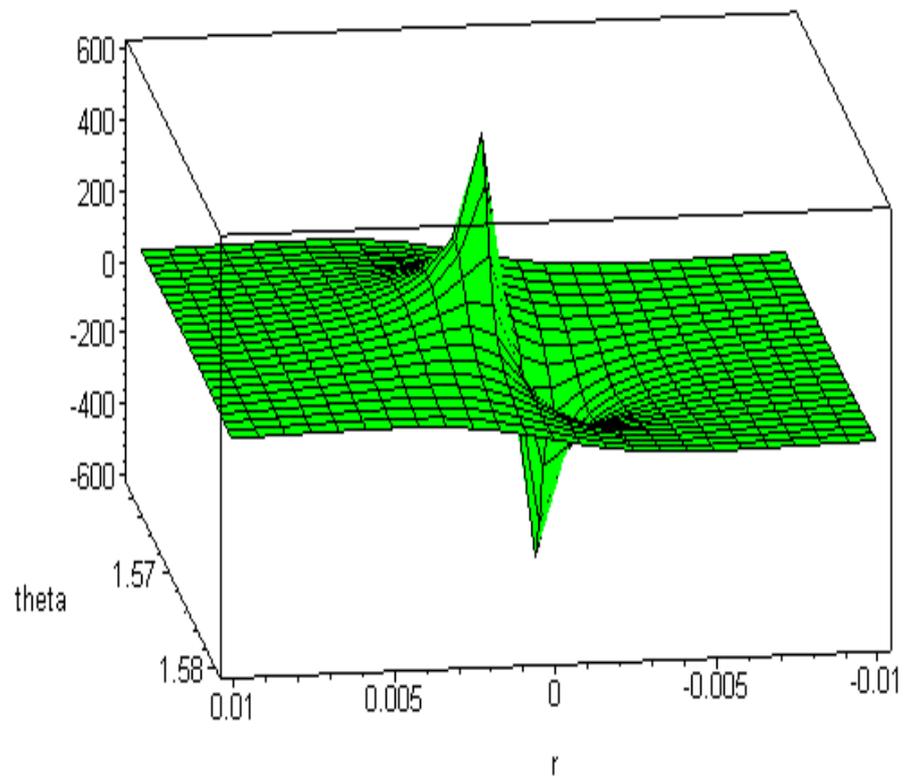
```
display(%,% ,title=`Schwarzes Loch Kerr Typ: Signaturen
der ersten und zweiten Diagonal Elemente der
Metrik`,axes=boxed);
```

```
plot3d(subs({M=1,a=1/2,P=0,Q=0},subs({Sigma=rhs(sub_
1),Delta=rhs(sub_2)},get_compts(kn)[4,4])),r=-
0.01..0.01,theta=Pi/2-0.01..Pi/2+
0.01,color=green,title=`Schwarzes Loch Kerr Typ: Die 4
Diagonal Elemente der Metrik in der Umgebung der
Singularität`,axes=boxed);
```

Schwarzes Loch Kerr Typ: Signaturen der ersten und zweiten Diagonal Elemente der  $\Lambda$



Schwarzes Loch Kerr Typ: Die 4 Diagonal Elemente der Metrik in der Umgebung der Si



Man erkennt, daß bei Annäherung an  $r=0$  auf der Linie, welche zu  $\theta = \frac{\pi}{2}$  unterschiedlich ist -das korrespondiert mit den normalen Ansätzen der diagonalen Elementen der Metrik: der Beobachter kreuzt bei  $r=0$  ohne jedoch mit der Singularität in Berührung zu kommen. Der Beobachter "mogelt" sich so an dieser Singularität vorbei. Das wird im ersten Bild verdeutlicht. Im zweiten Bild sehen wir den Wechsel von  $g_{3,3}$  -Ansatz für  $r>0$ .

Zu  $\phi$ : das ist eine zeitähnliche Koordinate. jedoch hat sie eine kreisförmige Eigenschaft und deshalb finden wir uns hier in einer Welt mit "geschlossener" Zeit wieder. Nähern wir uns  $r=0$  auf der Linie  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , so verursachen wir einen Wechsel der Metrik  $g_{0,0}$ . Damit finden wir eine wirkliche Singularität in dieser Richtung. Das zeigt, wie kompliziert die Sache mit der Kerr Metrik von rotierenden Schwarzen Löchern ist!!! Mit etwas mehr Präzision erhalten wir folgende Ergebnisse:

$M^2 < a^2$ . Es existiert kein Ereignishorizont, da  $r_p$  und  $r_n$  komplex sind, jedoch bleibt die Singularität bei  $r=0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Damit die Koordinaten Singularität bei  $\theta = 0$  weggelassen werden kann, müssen wir die Kerr-Schild Koordinaten mit linearen Elementen einführen.

Literatur:

<http://www.iop.org/EJ/abstract/0264-9381/8/9/006/>  
<http://www.conicyt.cl/bases/fondecyt/proyectos/01/2000/1000961.html>  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:gr-qc/0109085>  
<http://www.aei-potsdam.mpg.de/~koppitz/proceedings/koppitz/img3.htm>

```
> macro(ts=`t*`):
ks_le := d(s)^2 = -d(ts)^2 + d(x)^2 + d(y)^2 + d(z)^2 +
(2*M*r^3/(r^4+a^2*z^2))*( (r*(x*d(x)+y*d(y))-a*(x*d(y)-
y*d(x)))/(r^2+a^2)+z*d(z)/r+d(ts) )^2;
x + I*y = (r + I*a)*sin(theta)*exp(I*(Int(1,phi)+Int
(a/Delta,r)));
z = r*cos(theta);
ts = Int(1,t) + Int((r^2+a^2/Delta),r) - r;
ks_le := d(s)^2 = -d(t*)^2 + d(x)^2 + d(y)^2 + d(z)^2
+ \frac{2 M r^3 \left( \frac{r (x d(x) + y d(y)) - a (x d(y) - y d(x))}{r^2 + a^2} + \frac{z d(z)}{r} + d(t^*) \right)^2}{r^4 + a^2 z^2}
```

$$x + y I = (r + a I) \sin(\theta) e^{\left( \left( \int 1 d\phi + \int \frac{a}{\Delta} dr \right) I \right)}$$

$$z = r \cos(\theta)$$

$$t^* = \int 1 dt + \int r^2 + \frac{a^2}{\Delta} dr - r$$

Diese werden mit Hilfe der Minkowski Metrik vermindert bei  $M \rightarrow 0$ .

Literatur

[http://de.wikipedia.org/wiki/Metrik\\_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Metrik_(Mathematik))

<http://www.calsky.com/lexikon/de/txt/m/mi/minkowski.php>

<http://www.tu-harburg.de/rzt/rzt/it/Klassik/node3.html>

```
> int(subs( {P=0,Q=0},subs(Delta=rhs(sub_2),a/Delta) ),r):
x+I*y=(r+I*a)*sin(theta)*exp(I*(phi+%));
```

$$x + y I = (r + a I) \sin(\theta) e^{\left( \left( \phi + \frac{a \arctan\left(\frac{2r-2M}{2\sqrt{-M^2+a^2}}\right)}{\sqrt{-M^2+a^2}} \right) I \right)}$$

1) Ist  $r=0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  dann wird die Singularität im Ring  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $z = 0$ .  
sein

2)  $M^2 > a^2$ . wie bei 1) werden wir eine Ringsingularität haben, jedoch mit 2 Ereignishorizonten  $r_p$  und  $r_n$ . Als Beiwerk zur Kerr Metrik werden wir auch noch eine Koordinaten Singularität vorfinden

```
> get_compts(kn)[1,1]=0;
subs( Delta=rhs( sub_2 ),numer( lhs(%) ) ):
solve( subs({Q=0,P=0},%) = 0,r );
- \frac{\Delta - a^2 \sin(\theta)^2}{\Sigma} = 0
```

$$M + \sqrt{M^2 - a^2 + a^2 \sin(\theta)^2}, M - \sqrt{M^2 - a^2 + a^2 \sin(\theta)^2}$$

Wir entnehmen der obigen Lösung eine Ellipsoidgestalt. Wird der Ellipsoid bei gekreuzt  $r_I = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos(\theta)^2}$  wird eine Änderung des Vorzeichens der Metrik  $g_{0,0}$  vonstatten gehen. So war es auch beim Schwarzschild Schwarzen Loch: dieser Umstand zeigte daß es keine statischen Koordinaten unterhalb dieser Oberfläche oder Begrenzungsfläche gibt.

**Diese Ober- oder Begrenzungsfläche wird Ergosphäre genannt.  
Das Gebiet zwischen den beiden Ereignishorizonten  $r_p$  und  $r_n$  wird Ergogebiet  
(ergoregion) genannt.**

Das Nichtvorhandensein der Singularität bei  $r_{r,r}$  deutet ein nicht-statisches Verhalten an, das von einem Beobachter auf Grund der Rotation des Schwarzen Lochs wahrgenommen wird, aber nicht während des Falls in die Singularität; im Falle eines Beobachters unterhalb des Ereignishorizonts im Schwarzschild Schwarzen Loch.

### ***Kleine Zusammenfassung***

Ich habe gezeigt, wie komplex das Geschehen der Sternentwicklung ist: vom Brennschluss und was dann passiert bis zu verschiedenartigen Zuständen Schwarzer Löcher. Die MAPLE Routinen sind astrophysikalischer Standard. Sie spielen hier lediglich die Rolle des Demonstrators. Viel wichtiger soll die Erkenntnis sein, daß Diskussionen auf Verbalebene -ich sage dazu immer: Verbalinjurien- ganz schnell zu eklatanten Fehlaussagen oder völlig falscher Interpretation führen können. Es ist so wichtig, in diesem schwierigen Umfeld die richtige Interpretation zu finden und sicherlich wird auch an diesen hier gezeigten Standardtheorien noch sehr viel geübelt werden. Das alles muß mit Beobachtungen unterfüttert und durch Beobachtungen quasi "beglaubigt" werden. Deshalb wurde beispielsweise das Weltraumteleskop gebaut oder die komplexe Spiegelanordnung auf Palo Alto.

Ich hoffe, dem Astrophysik Forum einen kleinen Einblick in die komplexe Welt der Wissenschaft mit dieser Arbeit geben u können und möcht nun zum letzten Teil übergehen mit der Frage:

### **Woher kommt das, wohin geht das?**

## **Dritter Teil: Kosmologische Modelle**

### ***Einführung***

Die Gravitationstheorie ist wohl der wichtigste Teil für das Verständnis der Kosmologie. Die Beschreibung allgemein gültiger Strukturen des Universums verändert unsere Anschauung der Wirklichkeit grundlegend und erweitert natürlich unser Wissen. Es führt aber auch zu Kontroversen -die kennen wir sehr gut beispielsweise Stringtheorie zu Schleifen-Quanten-Theorie. Das Gebiet der Kosmologie erfreut sich zur Zeit einer gewissen Renaissance, es scheint "modern" zu werden. Das führe ich auf die zunehmende Leistungsfähigkeit gerade der kleineren Rechner, der PCs, zurück. Mittlerweile ist es ja selbst uns "Normalbürgern" möglich mit unseren Heimrechnern solche Rechnungen durchzuführen. Die Vorstellung dieses Kapitels möchte ich aber nicht überstrapazieren, sonst werde ich ja nie fertig!! Ich möchte wieder mit einigen MAPLE Beispielen einige der kosmologischen Ansätze

vostellen und etwas diskutieren.

### **Robertson-Walker Metrik**

Wir nehmen das Konzept der "Blattbildung" einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit auf eine 3-dimensionale raumähnliche Hyperfläche an. Die mathematische Herleitung erfolgt über die symmetrische Anschrift der Maxwellgleichungen und daraus abgeleitet auch der Darstellung der Strings. Das wird hier nicht weiter ausgeführt.

**Vorstellung:** Man nimmt ein Blatt und hält es schief in der Luft und führt die Hände so zusammen, dass es "schlapp" wird. Dies verbinden wir dann mit der Zeitabhängigkeit.

**Vorstellung:** unsere Hände führen willkürliche Bewegungen mit diesem lose eingespannten Blatt durch: die Geometrie des Blattes ändert sich dauernd. Es "flattert".

Wir beschränken uns auf isotropische und homogene Evolutionsmodelle, das sind Modelle ohne Krümmungsabhängigkeiten in Bezug auf den Beobachtungsort oder Beobachtungsorientierung. Wir nehmen an, daß diese Blattbildung mit einer isotropischen und homogenen Geometrie und Energie-Moment Verteilung existiert. Und das zu jedem Zeitpunkt. Diese raumähnliche Blattbildung wird homogene Hyperfläche genannt. Der Zeitvektor wird mit dem wirklichen Zeitfluß im Raumpunkt verbunden.

Wir nehmen eine 3-dimensionale Geometrie zu jedem fixen Zeitpunkt an. Ein 3-d Krümmungstensor hat die Form

$$R_{iklm} = R_{il} g_{km} - R_{im} g_{kl} + R_{km} g_{il} - R_{kl} g_{im} + \frac{R}{2} (g_{im} g_{kl} - g_{il} g_{km})$$

Wenn keine Krümmungsabhängigkeit bezüglich der Raumrichtung beliebiger Punkte vorhanden ist, dann hat unser Raum ein konstantes Krümmungsverhalten. Das wird von Shur's Theorem beschrieben:

$$R_{iklm} = \frac{R}{2} (g_{im} g_{kl} - g_{il} g_{km}), \quad (1)$$

worin  $R$  der konstante Ricci Skalar ist...was denn auch sonst, denn Ricci erzählt ja was über das Krümmungsverhalten.

Literatur:

<http://hypatia.math.uri.edu/~eaton/mth513.f01.htm>

<http://hypatia.math.uri.edu/~eaton/mth513.f01.htm>

Verwenden wir die Robertson-Walker Metrik

Literatur:

[http://fastbot.de/red.php?red=12684804002219761559+http://pauli.uni-muenster.de/Seminare/teilchen/teilchen\\_ss05/RobertsonWalker.pdf](http://fastbot.de/red.php?red=12684804002219761559+http://pauli.uni-muenster.de/Seminare/teilchen/teilchen_ss05/RobertsonWalker.pdf)

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left(1 + \frac{R \delta_{ij} x^i x^j}{8}\right)^2} \quad (2)$$

Für diese Metrik wird der räumliche Krümmungstensor wie folgt beschrieben:

```
> restart:
```

```
with(tensor):
```

```
with(linalg):
```

```
with(diffforms):
```

```
  Koordinaten
```

```
    g_compts      Metrische Komponenten
```

```
    g_compts[1,1] Komponenten im Intervall bezüglich d(x)^2
```

```
    g_compts[2,2] Komponenten im Intervall bezüglich d(y)^2
```

```
    g_compts[3,3] Komponenten im Intervall bezüglich d(z)^2
```

```
coord := [x, y, z]:
```

```
g_compts := array(symmetric, sparse, 1..3, 1..3):
```

```
g_compts[1,1] := 1/(1+R*(x^2+y^2+z^2)/8)^2:
```

```
g_compts[2,2] := 1/(1+R*(x^2+y^2+z^2)/8)^2:
```

```
g_compts[3,3] := 1/(1+R*(x^2+y^2+z^2)/8)^2:
```

```
g: Kovarianter Metrik Tensor
```

```
ginv Kontravarianter Metrik Tensor
```

```
D1g Berechnung des Krümmungstensors
```

```
g := create([-1,-1], eval(g_compts));
```

```
ginv := invert( g, 'detg' );
```

```
D1g := d1metric( g, coord );
```

```
D2g := d2metric( D1g, coord );
```

```
Cf1 := Christoffel1 ( D1g );
```

```
RMN := Riemann( ginv, D2g, Cf1 );
```

```
displayGR(Riemann, RMN);
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected
```

```
g := table([index_char = [-1, -1],
```

```
  compts =
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\left(1 + \frac{R(x^2 + y^2 + z^2)}{8}\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left(1 + \frac{R(x^2 + y^2 + z^2)}{8}\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\left(1 + \frac{R(x^2 + y^2 + z^2)}{8}\right)^2} \end{bmatrix}$$

D)

*The Riemann Tensor*

*non-zero components :*

$$R_{1212} = \frac{2048 R}{(8 + R x^2 + R y^2 + R z^2)^4}$$

$$R_{1313} = \frac{2048 R}{(8 + R x^2 + R y^2 + R z^2)^4}$$

$$R_{2323} = \frac{2048 R}{(8 + R x^2 + R y^2 + R z^2)^4}$$

*character : [-1, -1, -1, -1]*

Wir versuchen jetzt die direkte Berechnung der Gleichung  $B[i,j,k,l]$ . Diese kann kann sowohl als Tensor Produkt -tensor[prod]- oder als Tensor über Permutation der Indices -tensor[permute\_indices]-vollzogen werden.

```
> A := get_compts(g):
B := array(1..3, 1..3, 1..3, 1..3):
for i from 1 to 3 do
  for j from 1 to 3 do
    for k from 1 to 3 do
      for l from 1 to 3 do
        B[i,j,k,l] := eval(R*(A[i,k]*A[j,l] - A[i,l]*A
[j,k])/2):
```

```

if B[i,j,k,l]<>0 then print([i,j,k,l],B[i,j,k,l]);
else
fi:

```

```

od: od: od: od:

```

$$[1, 2, 1, 2], \frac{R}{2 \left( 1 + \frac{R(x^2 + y^2 + z^2)}{8} \right)^4}$$

$$[1, 2, 2, 1], - \frac{R}{2 \left( 1 + \frac{R(x^2 + y^2 + z^2)}{8} \right)^4}$$

$$[1, 3, 1, 3], \frac{R}{2 \left( 1 + \frac{R(x^2 + y^2 + z^2)}{8} \right)^4}$$

$$[1, 3, 3, 1], - \frac{R}{2 \left( 1 + \frac{R(x^2 + y^2 + z^2)}{8} \right)^4}$$

$$[2, 1, 1, 2], - \frac{R}{2 \left( 1 + \frac{R(x^2 + y^2 + z^2)}{8} \right)^4}$$

$$[2, 1, 2, 1], \frac{R}{2 \left( 1 + \frac{R(x^2 + y^2 + z^2)}{8} \right)^4}$$

$$[2, 3, 2, 3], \frac{R}{2 \left( 1 + \frac{R(x^2 + y^2 + z^2)}{8} \right)^4}$$

$$[2, 3, 3, 2], - \frac{R}{2 \left( 1 + \frac{R(x^2 + y^2 + z^2)}{8} \right)^4}$$

$$[3, 1, 1, 3], -\frac{R}{2\left(1 + \frac{R(x^2 + y^2 + z^2)}{8}\right)^4}$$

$$[3, 1, 3, 1], \frac{R}{2\left(1 + \frac{R(x^2 + y^2 + z^2)}{8}\right)^4}$$

$$[3, 2, 2, 3], -\frac{R}{2\left(1 + \frac{R(x^2 + y^2 + z^2)}{8}\right)^4}$$

$$[3, 2, 3, 2], \frac{R}{2\left(1 + \frac{R(x^2 + y^2 + z^2)}{8}\right)^4}$$

Die direkte Berechnung auf Basis der Gleichung  $B[i,j,k,l]$  sowie der Metrik ergibt einen Tensor mit Symmetrien:

$$[i,j,k,l]=[k,l,i,j]=[j,i,k,l]=-[i,j,l,k] \text{ sowie} \\ [i,j,k,l]+[i,l,j,k]+[i,k,l,j] = 0.$$

Diese Symmetrien sowie die Werte der nicht-Null Komponenten korrespondieren zum Krümmungstensor. Damit genügt diese Metrik der Bedingung des konstant gekrümmten Raums und entspricht dem Schur Theorem. Wir werden einige der Berechnungen des vorherigen Kapitels darauf beziehen können. Der nächste Schritt ist die Wahl geeigneter Koordinaten. Wir bevorzugen **2 Koordinatentypen:**

**sphärische und pseudo sphärische**

Im Falle der sphärischen Koordinaten erhalten wir die Gleichung  $B[i,j,k,l]$  auf neuer Basis:

`g_sp`            Koordinatentransformation in Metrisk Tensor  
`Sp_compts`     Matrix der Konversion von sphärischen Koordinaten

```
> g_sp := simplify(subs({x=r*cos(phi)*sin(theta), y=r*sin(phi)*sin(theta), z=r*cos(theta)}, get_compts(g))):
Sp_compts := array(1..3, 1..3):
Sp_compts[1,1] := cos(phi)*sin(theta):
Sp_compts[2,1] := sin(phi)*sin(theta):
Sp_compts[3,1] := cos(theta):
Sp_compts[1,2] := r*cos(phi)*cos(theta):
Sp_compts[2,2] := r*sin(phi)*cos(theta):
Sp_compts[3,2] := -r*sin(theta):
Sp_compts[1,3] := -r*sin(phi)*sin(theta):
```

```
Sp_compts[2,3] := r*cos(phi)*sin(theta):
Sp_compts[3,3] := 0:
```

```
Sp := eval(Sp_compts):
```

```
simplify( multiply(transpose(Sp), g_sp, Sp));
```

Übergang zu

den neuen Metrik-Koordinaten

$$\begin{bmatrix} \frac{64}{64 + 16 R r^2 + R^2 r^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{64 r^2}{64 + 16 R r^2 + R^2 r^4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{64 r^2 (-1 + \cos(\theta)^2)}{64 + 16 R r^2 + R^2 r^4} \end{bmatrix}$$

Der Nenner ist:

```
> denom(%[1,1]):
expand(%):
simplify(% , trig):
factor(%):
```

$$(R r^2 + 8)^2$$

Nach der Substitution von  $r^* = r \sqrt{\frac{R}{2}}$  (wir lassen das \* weg und verwenden  $R > 0$ ). Damit ergibt sich die Metrik zu:

coord:	sphärische Koordinaten
g_compts_sp	Metrik Komponenten
g_compts_sp[1,1]	Komponenten im Intervall $d(r)^2$
g_compts_sp[2,2]	Komponenten im Intervall $d(\theta)^2$
g_compts_sp[3,3]	Komponenten im Intervall $d(\phi)^2$
g_sp	Kovarianter Metrik Tensor

```
> coord := [r, theta, phi]:
g_compts_sp := array(symmetric, sparse, 1..3, 1..3):
g_compts_sp[1,1] := (2/R)/(1+r^2/4)^2:
g_compts_sp[2,2] := (2/R)*r^2/(1+r^2/4)^2:
g_compts_sp[3,3] := (2/R)*r^2*sin(theta)^2/(1+r^2/4)^2:
```

```
g_sp := create([-1,-1], eval(g_compts_sp));
g_sp :=
```

$$\text{table}(\text{index\_char} = [-1, -1], \text{compts} = \begin{bmatrix} \frac{2}{R \left(1 + \frac{r^2}{4}\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2 r^2}{R \left(1 + \frac{r^2}{4}\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2 r^2 \sin(\theta)^2}{R \left(1 + \frac{r^2}{4}\right)^2} \end{bmatrix})$$

Die Nennerform deutet auf eine Transformation der radial Koordinaten  $\sin(\chi) = r / \left(1 + \frac{r^2}{4}\right)$  hin. Für  $dr^2$  Koordinaten ergibt sich:

```
> hlp_r:=diff(sin(chi),chi)*d(chi) = simplify(diff(r/(1+r^2/4),r))*d(r);
hlp_1r:=lhs(hlp_r)^2 = rhs(hlp_r)^2;
hlp_2r:=subs(cos(chi)^2=1-r^2/(1+r^2/4)^2,lhs(hlp_1r)) =
rhs(hlp_1r):
factor(hlp_2r);
```

$$\text{hlp\_r} := \cos(\chi) d(\chi) = -\frac{4(-4+r^2)d(r)}{(4+r^2)^2}$$

$$\text{hlp\_1r} := \cos(\chi)^2 d(\chi)^2 = \frac{16(-4+r^2)^2 d(r)^2}{(4+r^2)^4}$$

$$\frac{(r-2)^2 (r+2)^2 d(\chi)^2}{(4+r^2)^2} = \frac{16 (r-2)^2 (r+2)^2 d(r)^2}{(4+r^2)^4}$$

Damit wird die neue Metrik zu.  $(d\chi = \frac{dr}{\left(1 + \frac{r^2}{4}\right)^2})$ :

coord	sphärische Koordinaten
g_compts_sp	Metrik Komponenten
g_compts_sp[1,1]	Komponenten im Intervall $d(\chi)^2$
g_compts_sp[2,2]	Komponenten im Intervall $d(\theta)^2$

g\_compts\_sp[3,3]      Komponenten im Intervall d(phi)^2  
g\_sp                      Kovarianter Metrik Tensor

```
> coord := [r, theta, phi]:
g_compts_sp := array(symmetric,sparse,1..3,1..3):
g_compts_sp[1,1] := 2/R:
g_compts_sp[2,2] := (2/R)*sin(chi)^2:
g_compts_sp[3,3] := (2/R)*sin(chi)^2*sin(theta)^2:
```

```
g_sp := create([-1,-1], eval(g_compts_sp));
```

$$g_{sp} := \text{table}([\text{index\_char} = [-1, -1], \text{compts} = \begin{bmatrix} \frac{2}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2 \sin(\chi)^2}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2 \sin(\chi)^2 \sin(\theta)^2}{R} \end{bmatrix}])$$

R/2 ist die Gauss'sche Krümmung K (K>0), damit ergibt sich die lineare Komponente zu:

```
> l_sp := d(s)^2 = a^2*(d(chi)^2 + sin(chi)^2*(d(theta)^2
+sin(theta)^2*d(phi)^2));
l_sp := d(s)^2 = a^2 (d(χ)^2 + sin(χ)^2 (d(θ)^2 + sin(θ)^2 d(φ)^2))
```

$a = \sqrt{\frac{1}{K}}$  ist ein Skalierungsfaktor. Es ist zu beachten, daß die Substitution  $r = a \sin(\chi)$  eine alternative Form der Metrik bewirkt. Es wird  $d(r) = a \cos(\chi) d(\chi)$  benutzt

```
> hlp_subs := subs({sin(chi)=r/a, d(chi)^2=d(r)^2/(a^2*(1-r^2/a^2))}, l_sp):
expand(hlp_subs);
```

$$d(s)^2 = \frac{d(r)^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2 d(\theta)^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d(\phi)^2$$

Für negative Krümmung ergibt sich

coord                      sphärische Koordinaten  
g\_compts\_sp                Metrik Komponenten  
g\_compts\_sp[1,1]        Komponenten im Intervall d(r)^2  
g\_compts\_sp[2,2]        Komponenten im Intervall d(theta)^2

g\_compts\_sp[3,3]    Komponenten im Intervall  $d(\phi)^2$   
g\_sp                    Kovarianter Metrik Tensor

```
> coord := [r, theta, phi]:
g_compts_hyp := array(symmetric, sparse, 1..3, 1..3):
g_compts_hyp[1,1] := (-2/R)/(1-r^2/4)^2:
g_compts_hyp[2,2] := (-2/R)*r^2/(1-r^2/4)^2:
g_compts_hyp[3,3] := (-2/R)*r^2*sin(theta)^2/(1-r^2/4)^2:

g_hyp := create([-1,-1], eval(g_compts_hyp));
g_hyp := table([index_char = [-1, -1],
```

$$compts = \begin{bmatrix} -\frac{2}{R\left(1-\frac{r^2}{4}\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2r^2}{R\left(1-\frac{r^2}{4}\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2r^2\sin(\theta)^2}{R\left(1-\frac{r^2}{4}\right)^2} \end{bmatrix} \quad D$$

R ist der modulare Ricci Skalar und die neue Radialkoordiante ist  $r \sqrt{\frac{R}{2}}$ . Wir versuchen es mal mit der Substitution:  $sh(\chi) = r/(1 - r^2/4)$ .  
Denn für  $dr^2$ -Komponenten erhalten wir:

```
> hlp:=diff(sinh(chi),chi)*d(chi) = simplify(diff(r/(1-r^2/4),r))*d(r);
hlp_1:=lhs(hlp)^2 = rhs(hlp)^2;
hlp_2:=subs(cosh(chi)^2=1+r^2/(1-r^2/4)^2,lhs(hlp_1)) =
rhs(hlp_1):
fac:=factor(hlp_2);
```

$$hlp := \cosh(\chi) d(\chi) = \frac{4(4+r^2)d(r)}{(-4+r^2)^2}$$

$$hlp\_1 := \cosh(\chi)^2 d(\chi)^2 = \frac{16(4+r^2)^2 d(r)^2}{(-4+r^2)^4}$$

$$fac := \frac{(4+r^2)^2 d(\chi)^2}{(r-2)^2 (r+2)^2} = \frac{16(4+r^2)^2 d(r)^2}{(r-2)^4 (r+2)^4}$$

**Und das große Finale:**

coord	Sphärische koordinaten
g_compts_hyp	Metrik Komponenten
g_compts_hyp[1,1]	Komponenten im Intervall bezogen auf d(chi)^2
g_compts_hyp[2,2]	Komponenten im Intervall bezogen auf d(theta)^2
g_compts_hyp[3,3]	Komponenten im Intervall bezogen auf d(phi)^2
g_hyp	Kovarianter Metrik Tensor

```
> coord := [r, theta, phi]:
g_compts_hyp := array(symmetric, sparse, 1..3, 1..3):
g_compts_hyp[1,1] := -2/R:
g_compts_hyp[2,2] := (-2/R)*sinh(chi)^2:
g_compts_hyp[3,3] := (-2/R)*sinh(chi)^2*sin(theta)^2:

g_hyp := create([-1,-1], eval(g_compts_hyp));
g_hyp :=
```

$$\text{table}([\text{index\_char} = [-1, -1], \text{compts} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{R} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2 \sinh(\chi)^2}{R} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2 \sinh(\chi)^2 \sin(\theta)}{R} \end{bmatrix})$$

$R/2$  ist die Gauss'sche Krümmung  $K$  ( $K < 0$ ). Damit werden die linearen Elemente:

```
> l_hyp := d(s)^2 = a^2*(d(chi)^2 + sinh(chi)^2*(d(theta)^2 + sin(theta)^2*d(phi)^2));
l_hyp := d(s)^2 = a^2 (d(χ)^2 + sinh(χ)^2 (d(θ)^2 + sin(θ)^2 d(φ)^2))
```

$a = \sqrt{\frac{1}{K}}$  ist der imaginäre Skalierungsfaktor. Die Substitution  $r = a \sinh(\chi)$

ergibt: es wird für die Substitution benutzt:  $d(r)=a*\cosh(\chi)*d(\chi)$

```
> hlp_1:=subs({sinh(chi)=r/a,d(chi)^2=d(r)^2/(a^2*(1+r^2/a^2))},l_hyp):
d_sq:=expand(hlp_1);
```

$$d_{sq} := d(s)^2 = \frac{d(r)^2}{1 + \frac{r^2}{a^2}} + r^2 d(\theta)^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d(\phi)^2$$

Zu guter letzt noch der flache, d.h. nicht gekrümmte Raum

```
> l_flat := d(s)^2 = a^2*(d(chi)^2 + chi^2*(d(theta)^2+sin(theta)^2*d(phi)^2));
l_flat := d(s)^2 = a^2 (d(chi)^2 + chi^2 (d(theta)^2 + sin(theta)^2 d(phi)^2))
```

$a$  is ein beliebiger Skalierungsfaktor.

Um die erhaltenen Geometrien zu veranschaulichen, können wir gebräuchliche Techniken der "Einbettung" anwenden. Im allgemeinen Fall ist diese Einbettung eines 3-dimensionalen Raums nicht durchführbar, wenn die Dimensionen des umhüllenden nicht-gekrümmten Raums auf 4 beschränkt bleiben. Wir haben dann 6 Funktionen  $g_{i,j}$ , aber nur 4 freie Parameter für einen 4-dimensionalen Raum zur Verfügung. Jedoch können wir einen Trick anwenden: Die konstanten nicht-Null Krümmungen erlauben es die Einbettung unseren gekrümmten Raum in einen 4-dimensionalen nicht gekrümmten Raum durchzuführen. Das wird durch die folgende Transformation, welche auf sphärischer Geometrie beruht gezeigt:

```
> deform(f=0,w1=1,w2=1,w3=1,v=1,chi=0,theta=0,phi=0);
e_1 := Dw^2 = a^2*d(cos(chi))^2;
e_2 := Dx^2 = (a*d(sin(chi)*sin(theta)*cos(phi)))^2;
e_3 := Dy^2 = (a*d(sin(chi)*sin(theta)*sin(phi)))^2;
e_4 := Dz^2 = (a*d(sin(chi)*cos(theta)))^2;
e_1 := Dw^2 = a^2 sin(chi)^2 d(chi)^2
```

$$e_2 := Dx^2 = a^2 \left( \frac{\sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\chi) d(\chi) + \sin(\chi) \cos(\phi) \cos(\theta) d(\theta) - \sin(\chi) \sin(\theta) \sin(\phi) d(\phi)}{2} \right)^2$$

$$e_3 := Dy^2 = a^2 \left( \frac{\sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\chi) d(\chi) + \sin(\chi) \sin(\phi) \cos(\theta) d(\theta) + \sin(\chi) \sin(\theta) \cos(\phi) d(\phi)}{2} \right)^2$$

$$e_4 := Dz^2 = a^2 (\cos(\theta) \cos(\chi) d(\chi) - \sin(\chi) \sin(\theta) d(\theta))^2$$

Für die Euklid'sche 4-er Metrik kennen wir:

```
> euk_4:=simplify( rhs(e_1) + rhs(e_2) + rhs(e_3) + rhs(e_
4), trig);
euk_4 := a^2 (d(χ)^2 + d(θ)^2 + d(φ)^2 + d(φ)^2 cos(χ)^2 cos(θ)^2 - d(φ)^2 cos(θ)^2
- d(φ)^2 cos(χ)^2 - d(θ)^2 cos(χ)^2)

> euk_4_erg:=collect(euk_4,d(phi)^2);
euk_4_erg := a^2 (1 - cos(θ)^2 - cos(χ)^2 + cos(χ)^2 cos(θ)^2) d(φ)^2
+ a^2 (d(χ)^2 + d(θ)^2 - d(θ)^2 cos(χ)^2)
```

Dieser Ausdruck kann wirklich leicht in  $l_{sp}$  eingebettet werden: Diese Einbettung ist durchführbar wegen:

```
> w^2 + x^2 + y^2 + z^2 =
simplify(
(a*cos(chi))^2 +(a*sin(chi)*sin(theta)*cos(phi))^2 +
(a*sin(chi)*sin(theta)*sin(phi))^2 + (a*sin(chi)*cos
(theta))^2);
w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2
```

Die angenommene Hyperfläche ist im nicht gekrümmtem 4-dimensionalem Raum eine 3-d Späre. Der Skalierungsfaktor ist der Radius des geschlossenen spärischen Universums. Im Fall  $l_{hyp}$  gibt es keinen ungekrümmten 4-d Eukild Raum, aber wir erkennen daß diese Einbettung in einem ungekrümmt hyperbolischen flachen Raum im Intervall  $-d w^2 + d x^2 + d y^2 + d z^2$  machbar ist. Wir erhalten deshalb:

```
> w^2 - x^2 - y^2 - z^2 =
simplify(
(a*cosh(chi))^2 - (a*sinh(chi)*sin(theta)*cos(phi))^2 -
(a*sinh(chi)*sin(theta)*sin(phi))^2 - (a*sinh(chi)*cos
(theta))^2);
w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a^2
```

Das ist der Ausdruck eines 3-d-Hyperboloid in einem ungekrümmten 4-d Raum

### ***Standard Modelle der Kosmologie***

Wenden wir uns einigen besonderen isotropischen und homogenen Modellen zu. Die Annahme des Zeit abhängigen Charakters der Geometrie führt zu Zeit abhängigen Skalierungsfaktoren  $a(t)$ . Die 4-er Metrik der sphärischen Geometrie zeigt sich als:

```
> coord := [t, chi, theta, phi]:
g_compts := array(symmetric,sparse,1..4,1..4):
g_compts[1,1] := -1:#dt^2
```

```

g_compts[2,2] := a(t)^2:#chi^2
g_compts[3,3]:=a(t)^2*sin(chi)^2:#dtheta^2
g_compts[4,4]:=a(t)^2*sin(chi)^2*sin(theta)^2:#dphi^2
g := create([-1,-1], eval(g_compts));
ginv := invert( g, 'detg' );
g := table([index_char = [-1, -1],

```

$$compts = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 \sin(\chi)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 \sin(\chi)^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix} \quad ])$$

Der Einstein Tensor ist:

Literatur:

[http://en.wikipedia.org/wiki/Einstein\\_tensor](http://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_tensor)

[http://www.search.com/reference/Einstein\\_tensor](http://www.search.com/reference/Einstein_tensor)

```

> D1g := d1metric( g, coord );
D2g := d2metric( D1g, coord );
Cf1 := Christoffel ( D1g );
RMN := Riemann( ginv, D2g, Cf1 );
RICCI := Ricci( ginv, RMN );
RS := Ricciscalar( ginv, RICCI );
G := Einstein( g, RICCI, RS );
G := table([index_char = [-1, -1],

```

compts =

$$\left[ -\frac{3 \left( \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 + 1 \right)}{a(t)^2}, 0, 0, 0 \right]$$

$$\left[ 0, 1 + \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 + 2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right), 0, 0 \right]$$

$$\left[ 0, 0, \left( -\cos(\chi)^2 + \cos(\chi)^2 \cos(\theta)^2 - 2 \cos(\chi)^2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \cos(\chi)^2 \cos(\theta)^2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) - \cos(\chi)^2 \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 \\
& + \cos(\chi)^2 \cos(\theta)^2 \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 - \cos(\theta)^2 \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 - \cos(\theta)^2 + \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 \\
& + 2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) - 2 \cos(\theta)^2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) + 1 \Big/ \sin(\theta)^2, 0 \Big] \\
& \left[ 0, 0, 0, -\cos(\chi)^2 + \cos(\chi)^2 \cos(\theta)^2 - 2 \cos(\chi)^2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) \right. \\
& + 2 \cos(\chi)^2 \cos(\theta)^2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) - \cos(\chi)^2 \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 \\
& + \cos(\chi)^2 \cos(\theta)^2 \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 - \cos(\theta)^2 \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 - \cos(\theta)^2 + \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 \\
& \left. + 2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) - 2 \cos(\theta)^2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) + 1 \right] \\
& \text{D)}
\end{aligned}$$

Wir nehmen an, die Materie sei durch den Energie-Impuls Tensor beschreibbar:

$$T_{\mu, \nu} = (p + \rho) u_{\mu} u_{\nu} + p g_{\mu, \nu} :$$

T\_compts: Energie Impuls Tensors eines Flüssigkeitstropfens

```

> T_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4):
T_compts[1,1] := rho(t):
T_compts[2,2] := a(t)^2*p(t):
T_compts[3,3] := a(t)^2*sin(chi)^2*p(t):
T_compts[4,4] := a(t)^2*sin(chi)^2*sin(theta)^2*p(t):
T := create([-1,-1], eval(T_compts));
T := table([index_char = [-1, -1],

```

$$\text{compts} = \begin{bmatrix} \rho(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 p(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 \sin(\chi)^2 p(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 \sin(\chi)^2 \sin(\theta)^2 p(t) \end{bmatrix}$$

)

Die erste Einstein Gleichung  $G_{0,0} - \Lambda g_{0,0} = -8\pi T_{0,0}$  hier wird die kosmologische Konstante  $\Lambda$  addiert, die als Energiedichte im Vakuum interpretiert werden kann.

```
> get_compts(G):
%[1,1]:
  e1 := simplify(%):
get_compts(g):
%[1,1]:
  e2 := simplify(%):
get_compts(T):
%[1,1]:
  e3 := simplify(%):
E[1] := expand(e1/(-3)) = -8*Pi*expand(e3/(-3)) + expand
(e2*Lambda/(-3));#first Einstein equation
```

$$E_1 := \frac{\left(\frac{d}{dt} a(t)\right)^2}{a(t)^2} + \frac{1}{a(t)^2} = \frac{8}{3} \pi \rho(t) + \frac{\Lambda}{3}$$

Die zweite Einstein Gleichung ist:

```
> get_compts(G):
%[2,2]:
  e1 := simplify(%):
get_compts(g):
%[2,2]:
  e2 := simplify(%):
get_compts(T):
%[2,2]:
  e3 := simplify(%):
E[2] := expand(e1/a(t)^2) = -8*Pi*expand(e3/a(t)^2) +
expand(e2*Lambda/a(t)^2);#second Einstein equation
```

$$E_2 := \frac{1}{a(t)^2} + \frac{\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2}{a(t)^2} + \frac{2\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right)}{a(t)} = -8\pi p(t) + \Lambda$$

Zwei andere Gleichungen sind zu den beiden Einstein Gleichungen in Tautologie.  
Nach einer elementaren Transformation, erhalten wir für die zweite Gleichung folgenden Ausdruck:

> **expand(simplify(E[2]-E[1])/2);**

$$\frac{\frac{d^2}{dt^2}a(t)}{a(t)} = -4\pi p(t) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{4}{3}\pi \rho(t)$$

Ähnlich verfahren wir für hyperbolische Geometrien:

```
g_compts[1,1] dt^2
g_compts[2,2] chi^2
g_compts[3,3] dtheta^2
g_compts[4,4] dphi^2
```

```
> coord := [t, chi, theta, phi]:
g_compts := array(symmetric,sparse,1..4,1..4):
g_compts[1,1] := -1:
g_compts[2,2] := a(t)^2:
g_compts[3,3]:=a(t)^2*sinh(chi)^2:
g_compts[4,4]:=a(t)^2*sinh(chi)^2*sin(theta)^2:
g := create([-1,-1], eval(g_compts));
ginv := invert( g, 'detg' ):
g := table([index_char = [-1, -1],
```

$$compts = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 \sinh(\chi)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 \sinh(\chi)^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix} \quad ])$$

```
> D1g := dlmatrix( g, coord ):
D2g := d2matrix( D1g, coord ):
Cf1 := Christoffel ( D1g ):
RMN := Riemann( ginv, D2g, Cf1 ):
RICCI := Ricci( ginv, RMN ):
RS := Ricciscalar( ginv, RICCI ):
G := Einstein( g, RICCI, RS );
```

$G := \text{table}([\text{index\_char} = [-1, -1],$

$\text{compts} =$

$$\left[ -\frac{3 \left( -1 + \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 \right)}{a(t)^2}, 0, 0, 0 \right]$$

$$\left[ 0, \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 - 1 + 2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right), 0, 0 \right]$$

$$\left[ 0, 0, -\left( -\cos(\theta)^2 \cosh(\chi)^2 + \cos(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 \cosh(\chi)^2 \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 \right.$$

$$\begin{aligned} & -\cos(\theta)^2 \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 - \cosh(\chi)^2 \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 + 2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) \\ & \left. - 2 \cos(\theta)^2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) + \cosh(\chi)^2 - 1 - 2 \cosh(\chi)^2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) \right. \end{aligned}$$

$$\left. + 2 \cos(\theta)^2 \cosh(\chi)^2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) \right] / \sin(\theta)^2, 0 \left[ \right]$$

$$\left[ 0, 0, 0, \cos(\theta)^2 \cosh(\chi)^2 - \cos(\theta)^2 - \cos(\theta)^2 \cosh(\chi)^2 \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 \right.$$

$$\begin{aligned} & \left. + \cos(\theta)^2 \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 + \cosh(\chi)^2 \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 - \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 - 2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) \right. \\ & \left. + 2 \cos(\theta)^2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) - \cosh(\chi)^2 + 1 + 2 \cosh(\chi)^2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) \right. \end{aligned}$$

$$\left. - 2 \cos(\theta)^2 \cosh(\chi)^2 a(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) \right]$$

)

Energie-Impuls Tensor eines Tropfen Flüssigkeit

```

T_compts := array(symmetric,sparse,1..4,1..4):
T_compts[1,1] := rho(t):
T_compts[2,2] := a(t)^2*p(t):
T_compts[3,3] := a(t)^2*sinh(chi)^2*p(t):
T_compts[4,4] := a(t)^2*sinh(chi)^2*sin(theta)^2*p(t):
T := create([-1,-1], eval(T_compts));
T:=table([index_char=[-1,-1],

```

$$compts = \begin{bmatrix} \rho(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 p(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 \sinh(\chi)^2 p(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 \sinh(\chi)^2 \sin(\theta)^2 p(t) \end{bmatrix}$$

)

```

> get_compts(G):
%[1,1]:
e1 := simplify(%):
get_compts(g):
%[1,1]:
e2 := simplify(%):
get_compts(T):
%[1,1]:
e3 := simplify(%):
E[1] := expand(e1/(-3)) = -8*Pi*expand(e3/(-3)) + expand
(e2*Lambda/(-3));#first Einstein equation

```

$$E_1 := -\frac{1}{a(t)^2} + \frac{\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2}{a(t)^2} = \frac{8}{3}\pi\rho(t) + \frac{\Lambda}{3}$$

```

> get_compts(G):
%[2,2]:
e1 := simplify(%):
get_compts(g):
%[2,2]:
e2 := simplify(%):
get_compts(T):
%[2,2]:
e3 := simplify(%):
E[2] := expand(e1/a(t)^2) = -8*Pi*expand(e3/a(t)^2) +
expand(e2*Lambda/a(t)^2):#second Einstein equation
expand(simplify(E[2]-E[1])/2);

```

$$\frac{d^2 a(t)}{dt^2} = -4 \pi p(t) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{4}{3} \pi \rho(t)$$

Die zweite Gleichung ist identisch mit der in der sphärischen Geometrie. Im Allgemeinen kann gesagt werden: die erste sowie die zweite Differentialgleichung sind zur Skalierung in unserem idealen Raum (Universum) anwendbar.

**basic\_1** erste Grundgleichung des homogenen Universums

**basic\_2** zweite Grundgleichung des homogenen Universums

```
> basic_1 := (diff(a(t),t)/a(t))^2 = -K/a(t)^2 + Lambda/3
+ 8*Pi*rho(t)/3;
basic_2 := diff(a(t),`$`(t,2))/a(t) = -4*Pi*(p(t)+rho
(t)/3)+1/3*Lambda;
```

$$basic_1 := \frac{\left(\frac{d}{dt} a(t)\right)^2}{a(t)^2} = -\frac{K}{a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{8}{3} \pi \rho(t)$$

$$basic_2 := \frac{d^2 a(t)}{dt^2} = -4 \pi \left( p(t) + \frac{1}{3} \rho(t) \right) + \frac{\Lambda}{3}$$

Es gilt:

K=+1 für den sphärischen Ansatz

K=-1 für den hyperbolischen Ansatz

K=0 für den nichtgekrümmten Ansatz

**Die linke Seite der ersten Grundgleichung (basic\_1) ist das Quadrat der Hubble Konstanten H**

Wir erinnern uns an den Wert von  $H_0$  mit  $65 \frac{km}{s Mpc}$  (pc= Pasrec:

Parallaxensekunde, sind ca. 3,26 Lichtjahre).  $K = \Lambda = 0$ : das Universum erreicht

seine kritische Dichte mit  $\rho_c = \frac{3 H_0^2}{8 \pi} = 7,9 * 10^{(-30)} \frac{g}{cm^3}$ . Werte  $\Omega_i =$

$\frac{\rho_i}{\rho_c}$

der Masse, Strahlung, kosmologischer Konstante und Krümmung sind:

$$\Omega_M = \frac{8 \pi \rho_M}{3 H_0^2}, \quad \Omega_R = \frac{8 \pi \rho_R}{3 H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3 H_0^2}, \quad \Omega_K = -\frac{K}{a_0^2 H_0^2}.$$

$a_0$  der Skalierungsfaktor. Zu diesem Moment geht die Bedeutung der Abstrahlung bezüglich der Masse verloren, sie wird uninteressant! Die Evolutionsgleichung für  $\Omega_i$  wird umgeschrieben: wir müssen die Zeitabhängigkeit dieser genannten Parameter berücksichtigen.

$\Lambda$  hängt nicht von  $a(t)$  (im Rahmen des Standardmodells) ab, die Abhängigkeit der Krümmung ist proportional zu  $\frac{1}{a^2}$ , die der Materiedichte zu  $\frac{1}{a^3}$ , jedoch die der Strahlung zu  $\frac{1}{a^4}$ . Die Gleichungen können nun etwas anders geschrieben werden:

> **basic\_3 := H(a)^2 = H[0]^2\*(Omega[R]\*a[0]^4/a^4+Omega[M]\*a[0]^3/a^3+Omega[Lambda]+Omega[K]\*a[0]^2/a^2);**

$$basic\_3 := H(a)^2 = H_0^2 \left( \frac{\Omega_R a_0^4}{a^4} + \frac{\Omega_M a_0^3}{a^3} + \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_K a_0^2}{a^2} \right)$$

Das Ergebnis dieser Definition der Grundgleichung ergibt die **kosmische Summenregel**:

$$1 = \frac{\Omega_M + \Omega_R}{a} + \Omega_\Lambda + \Omega_K$$

Wir führen neue Variablen ein:  $y = \frac{a}{a_0}$ ,  $\tau = H_0 (t - t_0)$ , worin  $t_0$  das zeitliche Moment repräsentiert. Damit folgt die "neue" zweite Grundgleichung, bei Vernachlässigung der Strahlungskomponente und Gebrauch der kosmischen Summenregel

$$d(\tau) = H[0] * d(t) \rightarrow a[0] * H[0] * (d(y)/d(\tau)) / a = (d(a)/d(t)) / a = H$$

zu:

> **basic\_4 := diff(y(tau),tau) = sqrt(1 + (1/y(tau)-1)\*Omega[M] + (y(tau)^2-1)\*Omega[Lambda]);**

$$basic\_4 := \frac{d}{d\tau} y(\tau) = \sqrt{1 + \left( \frac{1}{y(\tau)} - 1 \right) \Omega_M + (y(\tau)^2 - 1) \Omega_\Lambda}$$

Jetzt stelle ich einige typische Standard Modell Ansätze vor.

Literatur:

<http://www.maa.mhn.de/AAL/Theorie/mtheorie/node212.html>

<http://www.thp.uni-koeln.de/gravitation/courses/WS03/oberseminarWS03.html>

<http://www.cosmologymodels.com/index.html>

<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:gr-qc/9403005>

### *Einstein statisch*

statisches Universum

```
> rhs(basic_1) = 0:  
rhs(basic_2) = 0:  
allvalues( solve( {%, %%}, {a(t), Lambda} ) );  
{ Lambda = 12 pi p(t) + 4 pi rho(t), a(t) = sqrt( K / (4 pi p(t) + 4 pi rho(t)) },  
{ Lambda = 12 pi p(t) + 4 pi rho(t), a(t) = -sqrt( K / (4 pi p(t) + 4 pi rho(t)) }
```

Hier gilt für die Materiedichte:  $p=0$  und der Beitrag der Strahlung ist gering, deshalb gilt hier:

$$a^2 = \frac{1}{4 \pi \rho}, \Lambda = 4 \pi \rho$$

Diese Lösung ist recht einfach und verlangt  $K=+1$  sowie positives  $\Lambda$ . Diese Lösung wird jedoch nicht durch Beobachtungen bestätigt: Wir wollen auch im Modell die Rotverschiebung erkennen! Diese Rotverschiebung erklärt die Expansion des Weltalls oder im Modell das Anwachsen des Skalierungsfaktors.

### *Einstein-de Sitter*

$\Omega_M = 1$  und, in der Konsequenz:  $\Omega_\Lambda = \Omega_K = 0$ . Dies ist das ungekrümmte Universum und wird durch folgende Gleichung beschrieben:

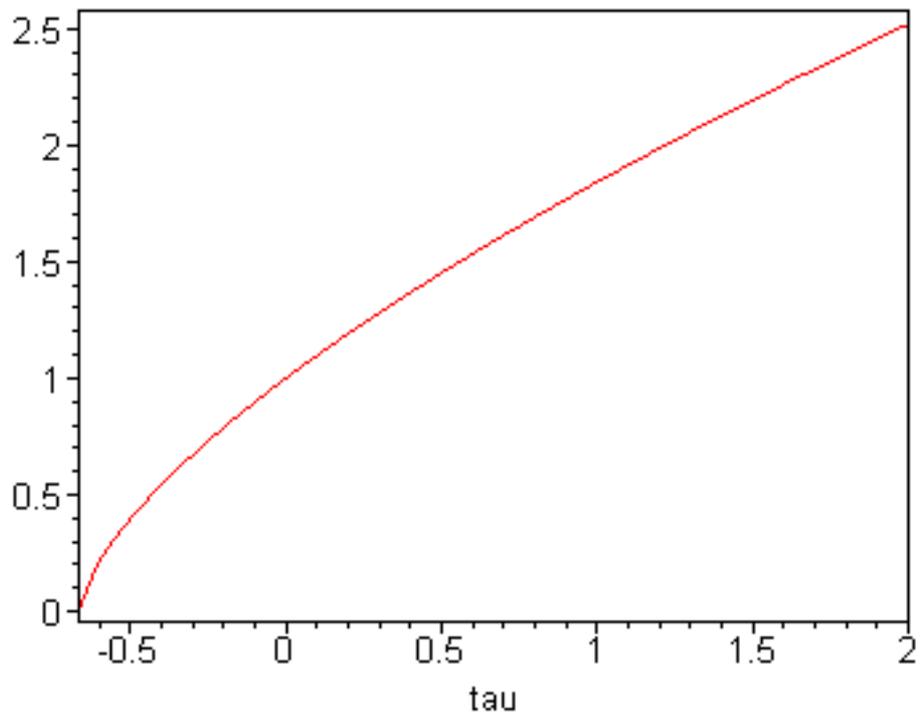
```
> EDS_1:=y(tau)^(1/2)*diff(y(tau),tau) = 1;  
EDS_2:=dsolve({EDS_1, y(0)=1}, y(tau));  
EDS:=allvalues(EDS_2);
```

$$EDS_1 := \sqrt{y(\tau)} \left( \frac{d}{d\tau} y(\tau) \right) = 1$$

$$EDS := y(\tau) = \frac{(12\tau + 8)^{(2/3)}}{4}, y(\tau) = \left( -\frac{(12\tau + 8)^{(1/3)}}{4} + \frac{1}{4} I \sqrt{3} (12\tau + 8)^{(1/3)} \right)^2,$$
$$y(\tau) = \left( -\frac{(12\tau + 8)^{(1/3)}}{4} - \frac{1}{4} I \sqrt{3} (12\tau + 8)^{(1/3)} \right)^2$$

```
> plot(1/4*(12*tau+8)^(2/3), tau= -2/3..2, axes=BOXED,  
title=`Einstein-de Sitter Universum`);
```

## Einstein-de Sitter Universum



Wir beschreiben die unendliche Expansion durch die initial-Singularität: dem Urknall.

$$y(\tau) = \frac{(12\tau + 8)^{\frac{2}{3}}}{4}$$

Ausgehend vom Skalierungsfaktors ist es denkbar das Alter des Universums zu bestimmen Anfangsbedingung:  $y(0) = 0$

```
> age_hlp:=0 = (12*H[0]*(0-t[0]) + 8)^(2/3)/4:
age:=solve(age_hlp,t[0]);
```

$$age := \frac{2}{3} \frac{1}{H_0}$$

```
> age_years:=evalf((2/3)*3*10^19/65/60/60/24/365);
age_years := 0.9756859072 10^10
```

Das so erhaltene Alter des Universums ist zwar schon beachtlich, aber es stimmt nicht! Die Beobachtungen von Sternen zeigen viel viel ältere Typen, gerade in globalen Haufen.

### *de Sitter und anti-de Sitter*

Das leere Universum wird durch ( $\Omega_M = 0$ ) mit  $R > 0$  (de Sitter) und  $R < 0$  (anti-de Sitter) dargestellt. Kommen wir nochmal auf die erste Grundgleichung basic-1 zurück, so finden wir für das de-Sitter Universum:

in de\_sit\_2 ist  $\lambda = \lambda/3$ .

```
> de_sit_1:=assume(lambda,positive):
```

```
de_sit_2:=subs({rho(t)=0,K=1,Lambda=lambda*3},basic_1):
de_sit_3:=expand(de_sit_2*a(t)^2);
de_sit_erg:=dsolve(de_sit_3,a(t));
```

$$de\_sit\_3 := \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 = -1 + a(t)^2 \lambda \sim$$

$$de\_sit\_erg := a(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \sim}}, a(t) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda \sim}}, a(t) = \frac{1}{2} \frac{\left( 1 + \frac{(e^{(t\sqrt{\lambda \sim})})^2}{(e^{(-CI\sqrt{\lambda \sim})})^2} \right) e^{(-CI\sqrt{\lambda \sim})}}{e^{(t\sqrt{\lambda \sim})} \sqrt{\lambda \sim}},$$

$$a(t) = \frac{1}{2} \frac{\left( 1 + \frac{(e^{(-CI\sqrt{\lambda \sim})})^2}{(e^{(t\sqrt{\lambda \sim})})^2} \right) e^{(t\sqrt{\lambda \sim})}}{e^{(-CI\sqrt{\lambda \sim})} \sqrt{\lambda \sim}}$$

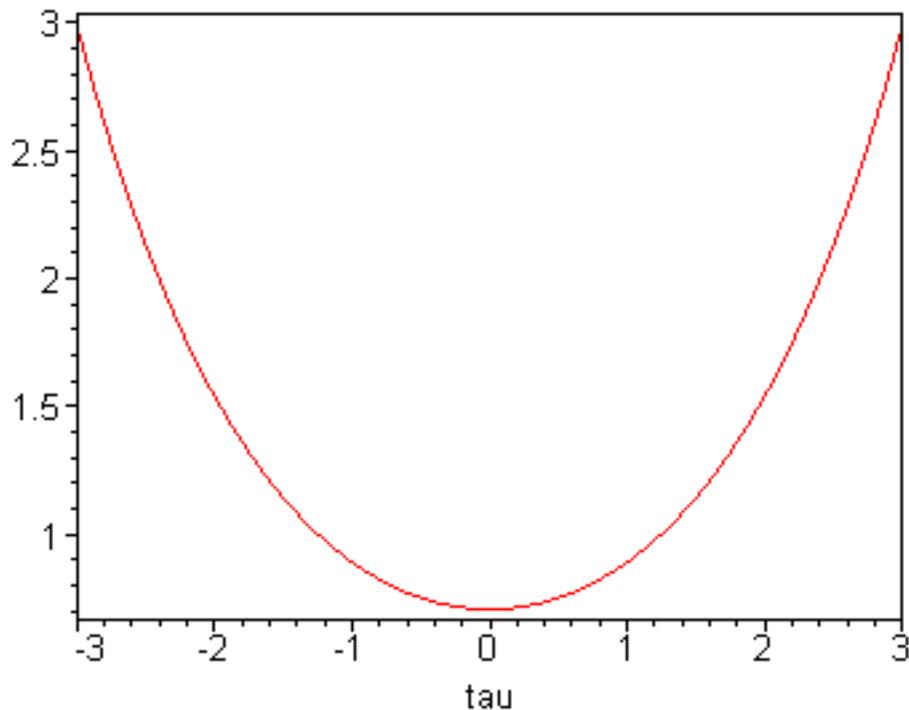
Wir können erkennen, daß die ersten beiden Lösungen die Grundgleichung basic\_2 nicht erfüllen. Andere Lösungen ergeben:

$$a(t) = \frac{\cosh(\sqrt{\lambda} (t - C))}{2 \sqrt{\lambda}}$$

C ist die positive oder auch negative Konstante, die das zeitliche Moment des zugehörigen minimalen Skalierungsfaktors beschreibt.

```
> plot(subs(lambda=0.5,\
cosh(sqrt(lambda)*tau)/2/sqrt(lambda)),\
tau=-3..3,title='de Sitter Universum',axes=boxed);
```

## de Sitter Universum



Für das anti-de Sitter Modell erhalten wir: (auch hier nehmen wir:  $\lambda = \Lambda/3$ )

```
> anti_de_sit_1:=assume(lambda,negative):
anti_de_sit_2:=subs({rho(t)=0,K=-1,Lambda=lambda*
3},basic_1):
anti_de_sit_3:=expand(anti_de_sit_2*a(t)^2);
anti_de_sit:=dsolve(anti_de_sit_3,a(t));
```

$$\text{anti\_de\_sit\_3} := \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)^2 = 1 + a(t)^2 \lambda$$

$$\text{anti\_de\_sit} := a(t) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}, a(t) = -\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}, a(t) = \frac{\sin(t\sqrt{-\lambda} - C_1\sqrt{-\lambda})}{\sqrt{-\lambda}},$$

$$a(t) = -\frac{\sin(t\sqrt{-\lambda} - C_1\sqrt{-\lambda})}{\sqrt{-\lambda}}$$

De Sitter und anti-de Sitter spielen eine wichtige Rolle in vielen Aufsätzen der Gravitationstheorie und der Kosmologie. Besonders in solchen, welche das inflationäre Universum zu Beginn der Evolution beschreiben.

### *Geschlossenes Friedmann-Lemaître Modell*

$\Omega_M > 1$ ,  $\Lambda = 0$  und, als Konsequenz  $\Omega_K < 0$  ( $K=+1$ ). Das beschreibt das geschlossene sphärische Universum  $b = \Omega[M] - 1 > 0$

```
> fried_1:=y(tau)*(diff(y(tau),tau)^2+b) =Omega[M];
```

$$fried\_1 := y(\tau) \left( \left( \frac{d}{d\tau} y(\tau) \right)^2 + b \right) = \Omega_M$$

> `fried_erg:=solve( fried_1,diff(y(tau),tau) );`

$$fried\_erg := \frac{\sqrt{-y(\tau)(y(\tau)b - \Omega_M)}}{y(\tau)}, -\frac{\sqrt{-y(\tau)(y(\tau)b - \Omega_M)}}{y(\tau)}$$

> `d(t)=sqrt(y/b/(Omega[M]/b - y))*d(y);`

$$d(t) = \sqrt{\frac{y}{b \left( \frac{\Omega_M}{b} - y \right)}} d(y)$$

Wir führen eine neue Variable  $\phi$  ein und erhalten:

> `fried_new_1:=sqrt(y/(Omega[M]/b - y)) = tan(phi);`

`y = solve(fried_new_1, y);`

`y = convert(rhs(%), sincos);`

$$fried\_new\_1 := \sqrt{\frac{y}{\frac{\Omega_M}{b} - y}} = \tan(\phi)$$

$$y = \frac{\tan(\phi)^2 \Omega_M}{b (\tan(\phi)^2 + 1)}$$

$$y = \frac{\sin(\phi)^2 \Omega_M}{\cos(\phi)^2 b \left( \frac{\sin(\phi)^2}{\cos(\phi)^2} + 1 \right)}$$

Aber das ergibt  $y = \frac{\Omega_M \sin(\phi)^2}{b} = \frac{\Omega_M (1 - \cos(2\phi))}{2b}$ .

Und:

> `deform(f=0,w1=0,w2=0,v=1,phi=0,y=0);`

`d(y) = d( (Omega[M]/b)*sin(phi)^2 );`

$$d(y) = 2 \sin(\phi) \cos(\phi) \left( d(\phi) \wedge \frac{\Omega_M}{b} \right) + \sin(\phi)^2 d\left( \frac{\Omega_M}{b} \right)$$

Damit erhalten wir als Ergebnisse:

```
> hlp:=subs( y=Omega[M]*sin(phi)^2/b,sqrt(y/(b*(Omega[M]/b-y))) ):
simplify(hlp);
```

$$\sqrt{\frac{\sin(\phi)^2}{\cos(\phi)^2 b}}$$

```
> d(t) = simplify( (Omega[M]/b)*tan(phi)*2*sin(phi)*cos(phi) )*d(phi)/sqrt(b);
```

$$d(t) = \frac{2 \Omega_M \sin(\phi)^2 d(\phi)}{b^{(3/2)}}$$

Das Alter des Universums kann nun berechnet werden: Anfangsbedingung ist:  $y(0)=0$   
 $\rightarrow \phi=0$ . loes\_1 ist das Alter in Abhängigkeit zum Ausbreitungswinkel  $\phi$

```
> int( Omega[M]*(1-cos(2*x))/(Omega[M]-1)^(3/2), x=0..phi):
loes_1:=t = simplify(%);
```

$$loes_1 := t = \frac{1}{2} \frac{\Omega_M (-2\phi + \sin(2\phi))}{(\Omega_M - 1)^{(3/2)}}$$

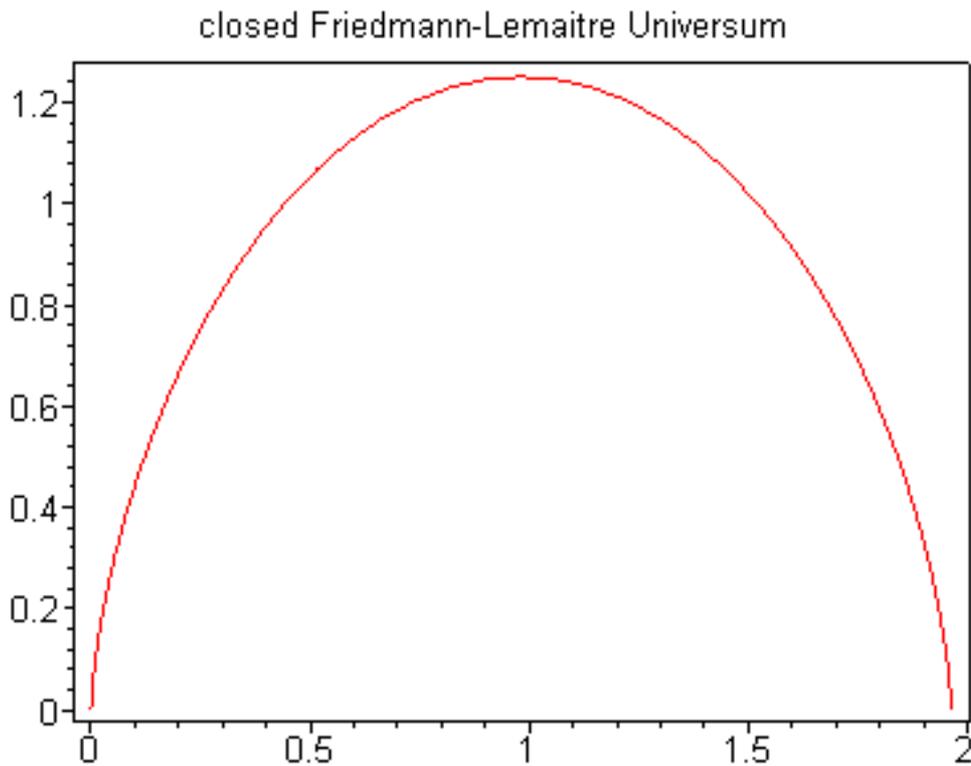
Diese Gleichung in Kombination mit  $y(\phi)$  ist die parametrische Darstellung einer Zykloiden

```
> rhs(loes_1);
```

$$\frac{1}{2} \frac{\Omega_M (-2\phi + \sin(2\phi))}{(\Omega_M - 1)^{(3/2)}}$$

```
> y = Omega[M]*(1-cos(2*phi))/(2*(Omega[M]-1));
plot([subs(Omega[M]=5,rhs(loes_1)),subs(Omega[M]=5,rhs(%)),phi=0..Pi], axes=boxed, title=`closed Friedmann-Lemaitre Universum`);
```

$$y = \frac{\Omega_M (1 - \cos(2\phi))}{2 \Omega_M - 2}$$

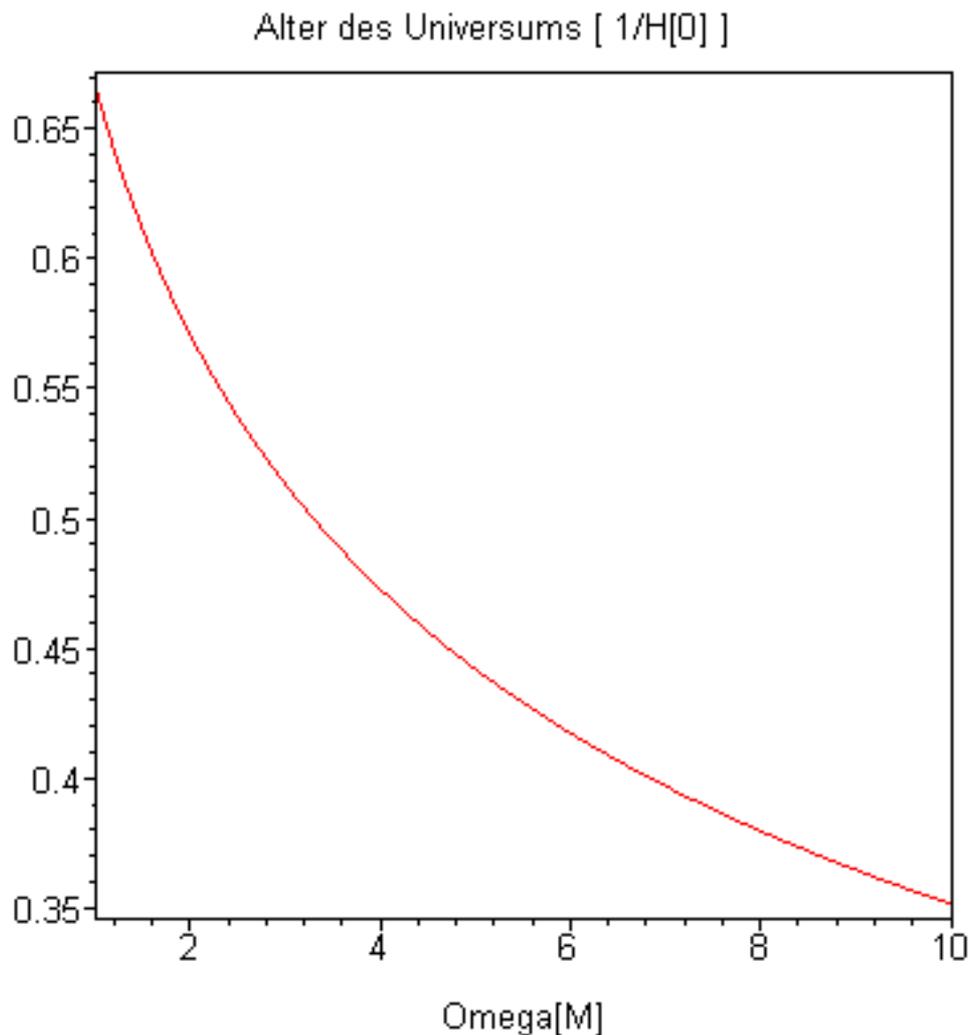


In diesem Modell wird die Expansion von der Änderung der Singularität in Kontraktion bestimmt. Dieses Universum beginnt mit dem Urknall und es endet mit einem "Spätknall". Das Alter in Abhängigkeit des Raumwinkels läßt sich bestimmen zu mit den Anfangsbedingungen:  $y(t_0)=1 \rightarrow \text{phi}=?$

```
> 1 = sin(phi)^2*Omega[M]/(Omega[M]-1):
loes_2 := solve(%,phi);
age_fried:=subs(phi=loes_2[1],rhs(loes_1));
plot(age_fried, Omega[M]=1.01..10, axes=BOXED,
title=`Alter des Universums [ 1/H[0] ]`);
```

$$\text{loes}_2 := \arcsin\left(\frac{\sqrt{\Omega_M(\Omega_M-1)}}{\Omega_M}\right), -\arcsin\left(\frac{\sqrt{\Omega_M(\Omega_M-1)}}{\Omega_M}\right)$$

$$\text{age\_fried} := \frac{1}{2} \frac{\Omega_M \left( -2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{\Omega_M(\Omega_M-1)}}{\Omega_M}\right) + \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{\Omega_M(\Omega_M-1)}}{\Omega_M}\right)\right) \right)}{(\Omega_M-1)^{(3/2)}}$$



Das Anwachsen von  $\Omega_M$  verringert das Alter des Universums. Dieses Alter ist geringer als das des Einstein-de Sitter Modells. Beobachtungen der Mikrowellen-Untergrundstrahlung sagen:  $\Omega_K \sim 0$  und das stimmt mit diesem Modell nicht überein!

### *Offenes Friedmann-Lemaitre Universum*

$\Omega_M < 1$   $\Lambda = 0$  und, mit der Konsequenz  $\Omega_K > 0$  ( $K = -1$ ). Das beschreibt ein offenes hyperbolisch sphärisches Universum. Von den oberen Gleichungen erhalten wir:

```
> hlp:=y(tau)*(diff(y(tau),tau)^2 - a) = Omega[M];# a = -b = 1-Omega[M]>0
```

$$hlp := y(\tau) \left( \left( \frac{d}{d\tau} y(\tau) \right)^2 - a \right) = \Omega_M$$

```
> loes:=solve( hlp,diff(y(tau),tau) );
```

$$loes := \frac{\sqrt{y(\tau) (y(\tau) a + \Omega_M)}}{y(\tau)}, -\frac{\sqrt{y(\tau) (y(\tau) a + \Omega_M)}}{y(\tau)}$$

> **eq\_1:=diff(y(tau), tau)=sqrt((Omega[M] + a\*y(tau))/y(tau));**

$$eq_1 := \frac{d}{d\tau} y(\tau) = \sqrt{\frac{y(\tau) a + \Omega_M}{y(\tau)}}$$

loes stellt die implizite Lösung von y(tau) dar.

> **eq\_2:=dsolve(eq\_1, y(tau)):**  
**loes\_1 := simplify( subs(a=1-Omega[M],eq\_2),radical,symbolic);**

$$loes_1 := \frac{1}{2} \left( -\Omega_M \ln \left( \frac{1 - \Omega_M + 2 y(\tau) \Omega_M - 2 y(\tau) - 2 \sqrt{-y(\tau) (y(\tau) \Omega_M - y(\tau) - \Omega_M)} \sqrt{-\Omega_M + 1}}{2 \sqrt{-\Omega_M + 1}} \right) \right. \\ \left. + 2 \tau \sqrt{-\Omega_M + 1} \Omega_M + 2 \_C1 \sqrt{-\Omega_M + 1} \Omega_M \right. \\ \left. + 2 \sqrt{-y(\tau) (y(\tau) \Omega_M - y(\tau) - \Omega_M)} \sqrt{-\Omega_M + 1} - 2 \tau \sqrt{-\Omega_M + 1} - 2 \_C1 \sqrt{-\Omega_M} \right) / (\sqrt{-\Omega_M + 1} (\Omega_M - 1)) = 0$$

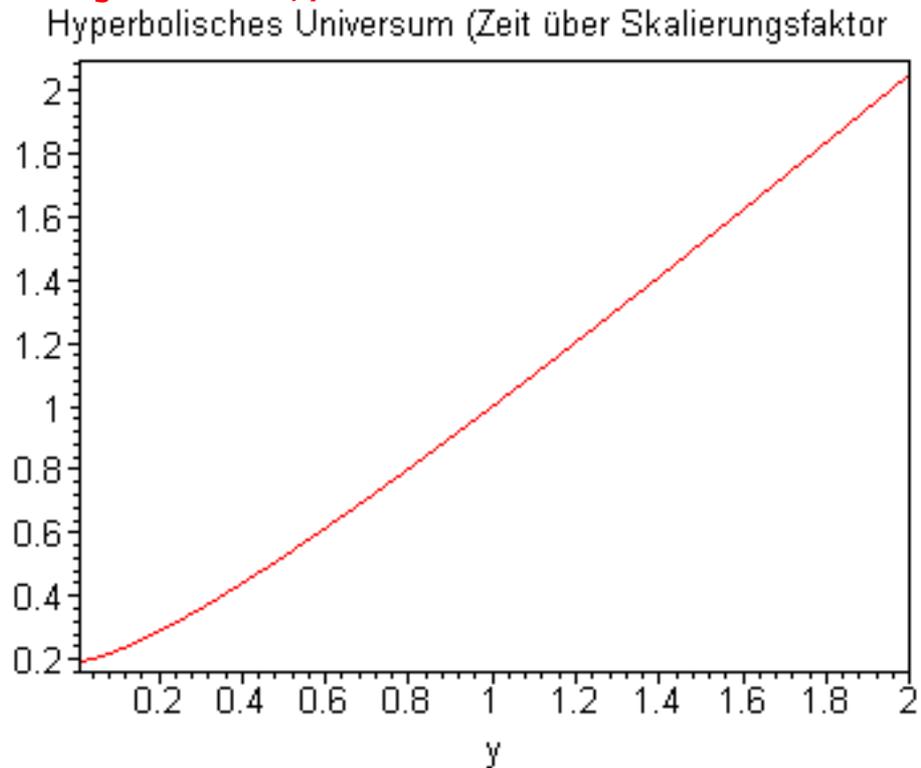
Definition von \_C1: loes\_2: implizite Lösung mit gefundenem \_C1.

> **subs(tau=1,loes\_1):**  
**subs(y(1)=1,%):**  
**solve(%,\_C1):**  
**simplify( subs(\_C1=%,loes\_1) ):**  
**subs(y(tau)=y,%):**  
**loes\_2 := solve(%,tau);**

$$loes_2 := -\frac{1}{2} (\Omega_M \ln(-\Omega_M + 2 + 2 \sqrt{-\Omega_M + 1}) \\ - \Omega_M \ln(\Omega_M - 2 y \Omega_M + 2 y + 2 \sqrt{-y (y \Omega_M - y - \Omega_M)} \sqrt{-\Omega_M + 1}) - 2 \sqrt{-\Omega_M + 1} \\ + 2 \sqrt{-y (y \Omega_M - y - \Omega_M)} \sqrt{-\Omega_M + 1}) / (\sqrt{-\Omega_M + 1} (\Omega_M - 1))$$

Diese Lösung stellen wir graphisch dar:

```
> subs(Omega[M]=0.3,loes_2):  
plot(%, y=0.01..2, axes=BOXED, colour=RED,  
title=`Hyperbolisches Universum (Zeit über  
Skalierungsfaktor` );
```



Der Extremfall  $\Omega_M \rightarrow 0$  (das entspricht einer leeren Welt)

```
> limit(loes_2,Omega[M]=0);
```

$$\sqrt{y^2}$$

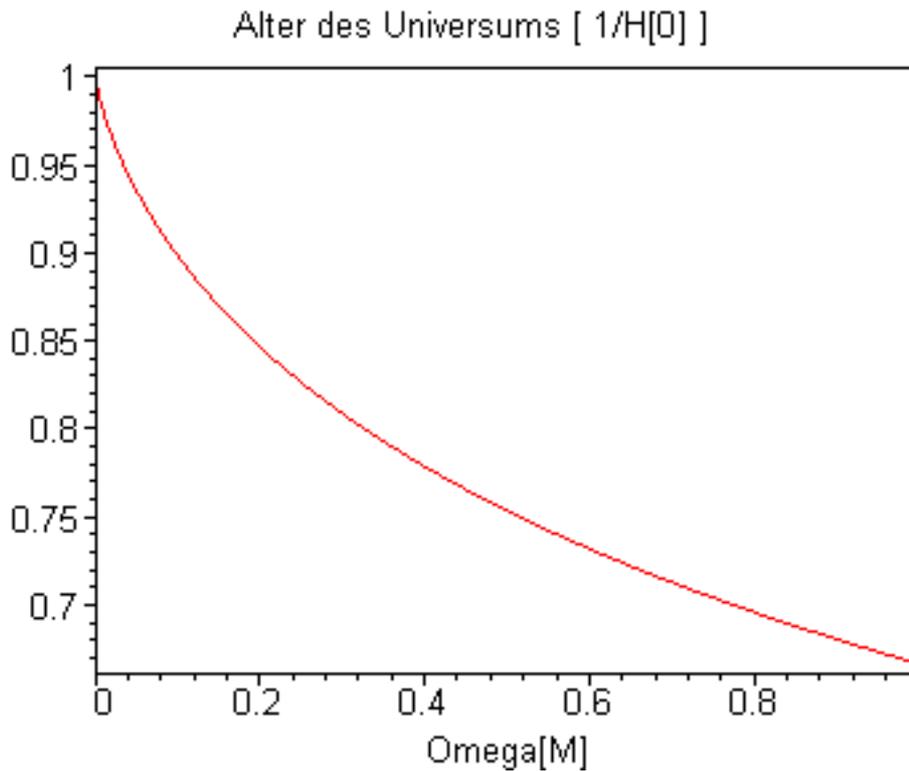
resultiert in einer geringen linearen Ausdehnung des Weltalls und gibt eine Vorstellung des maximalen Weltalters in diesem Modell

```
> age_years:=evalf(3*10^19/65/60/60/24/365);  
age_years := 0.1463528861 1011
```

```
>
```

Die Abhängigkeit von  $\Omega_M$  zeigt sich als: Alter des Universums  $1/H[0]$

```
> -(subs(y=0,loes_2)-subs(y=1,loes_2)):  
plot(%, Omega[M]=0..1,axes=boxed, title=`Alter des  
Universums [ 1/H[0] ]`);
```



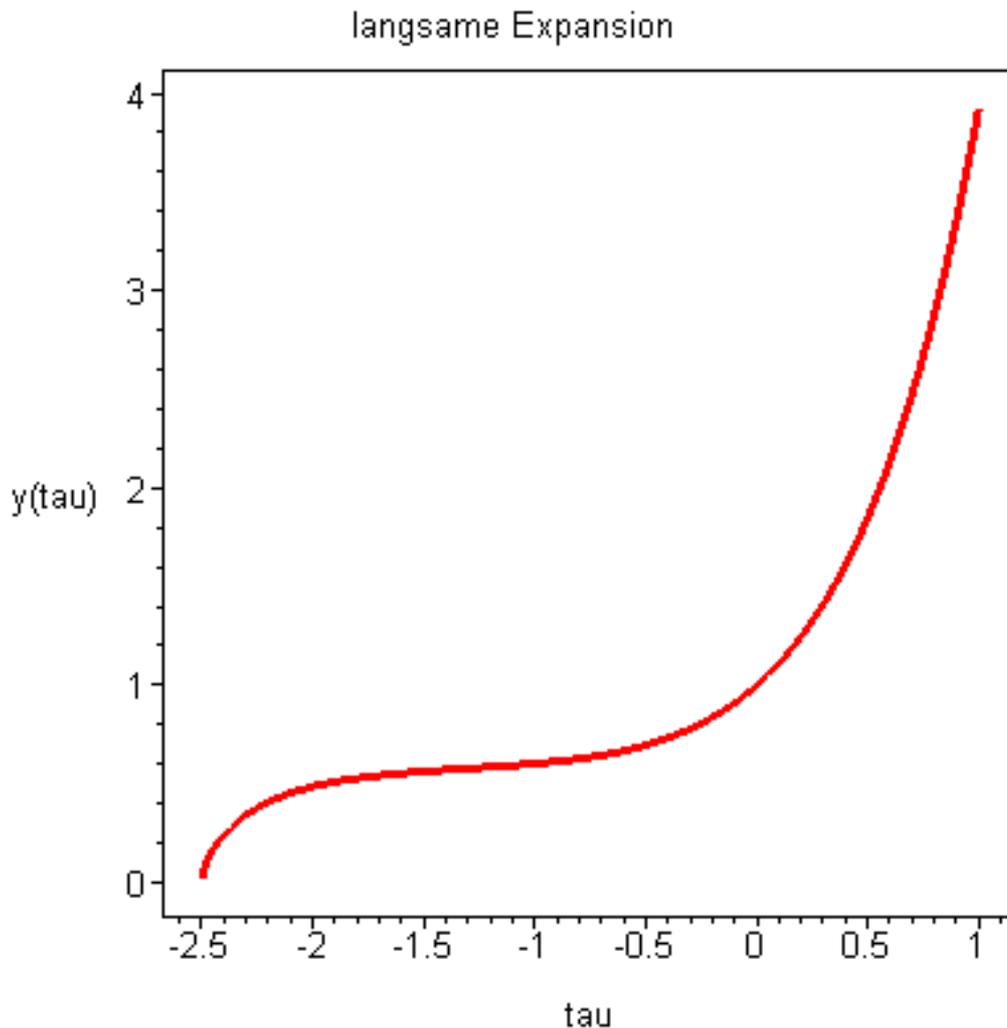
Das Wachstum der Materiedichte verringert das Alter des Weltalls. Wenn Berechnungen von  $\Omega_M = 0.3$  ergibt (das bedeutet etwa  $12 \times 10^9$  Jahre) dann genügt auch dieses Modell nicht Erwartungen. Es kann aber sein, daß die Krümmung nicht die Richtige ist.

Also schau wir mal hin:

***Expandierendes sphärisches und wieder-kollabierendes hyperbolisches Universum***

Dieses Model zeigt die Möglichkeit einer unendlichen Expansion unter sphärischer Geometrie in der Anwesenheit einer von Null verschiedenen kosmologischen Konstante.

```
> with(DEtools):
  DEplot(subs({Omega[M]=1, Omega[Lambda]=2.59}, basic_4), [y(tau)], tau=-2.5..1, [[y(0)=1]], stepsize=0.01, axes=boxed, linecolor=red, arrows=none, title=`langsame Expansion`);
```



Wir wählen solche Parameter, die nahe an 1 für ein statisches Universum sind ( $\Omega_M = 1$ ), aber worin der kosmologische Term leicht dominiert  $\Omega_\Lambda > 2\Omega_M$ . Das ergibt eine Verzögerung der Expansion, die etwa so aussieht, wie der Übergang zum Kollaps, jedoch mit der Dominanz von  $\Omega_\Lambda$ , welche die Expansion weiter treibt.

Dieses Modell kann das hohe Alter des Universums für große  $H_0$  aufzeigen und wir können die Schiefelage der Verteilung der Rot-Verschiebung weit entfernter Quasare damit verstehen lernen.

Das folgende Beispiel zeigt das Kollapsverhalten des offenen hyperbolischen Universums.

### Expansion

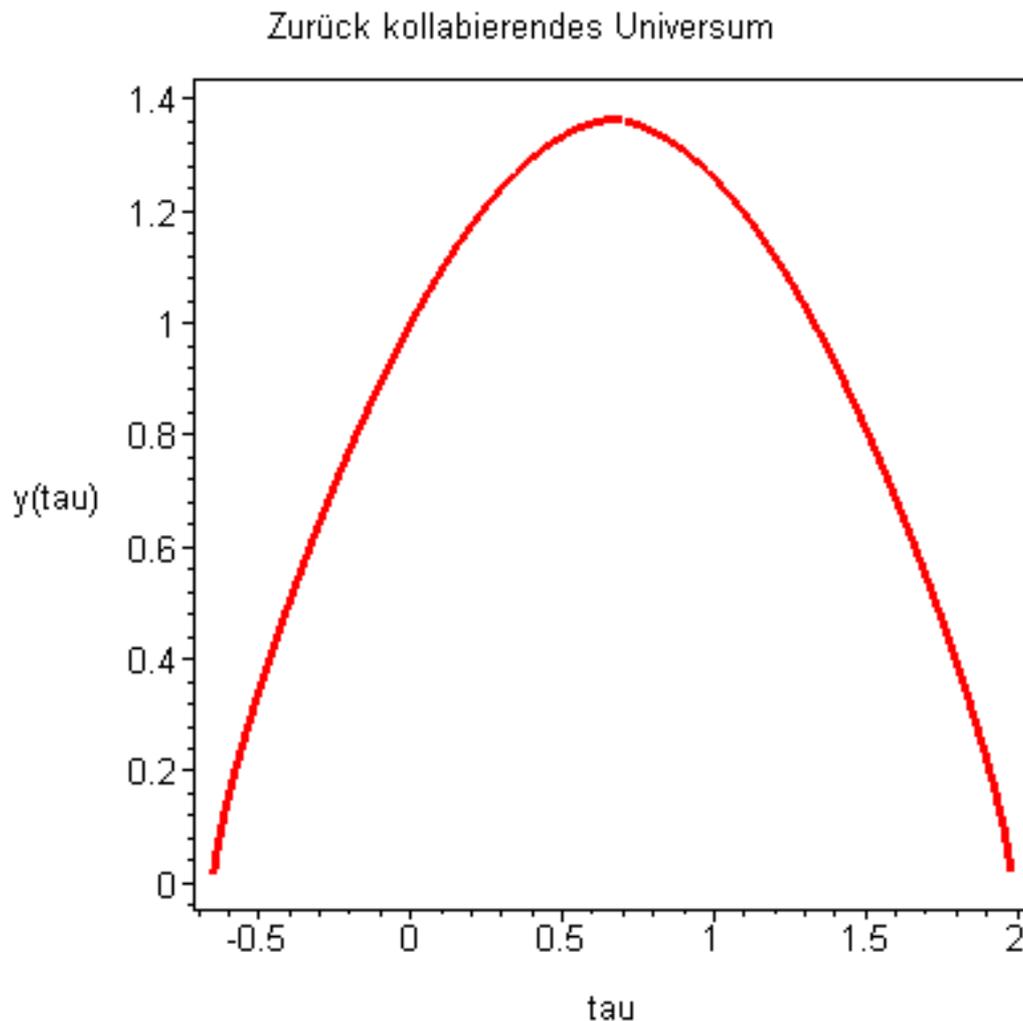
```
> p1 := DEplot(subs({Omega[M]=0.5, Omega[Lambda]=-1}, basic_4), [y(tau)], tau=-0.65..0.7, [[y(0)=1]], stepsize=0.01, axes=boxed, linecolor=red, arrows=none):
```

### Kontraktion

Wir müssen das Vorzeichen auf der rechten Seite der Gleichung basic\_4 umdrehen

und die Anfangsbedingungen ändern!

```
> p2 := DEplot(subs({Omega[M]=0.5, Omega[Lambda]=-1}, lhs
(basic_4)=-rhs(basic_4)), [y(tau)], tau=0.71..1.98, [[y
(0.71)=1.36]], stepsize=
0.01, axes=boxed, linecolor=red, arrows=None):
> with(plots):
display(p1, p2, title=`Zurück kollabierendes Universum`);
Warning, the name changecoords has been redefined
```



### ***Feder Modell (bouncing model)***

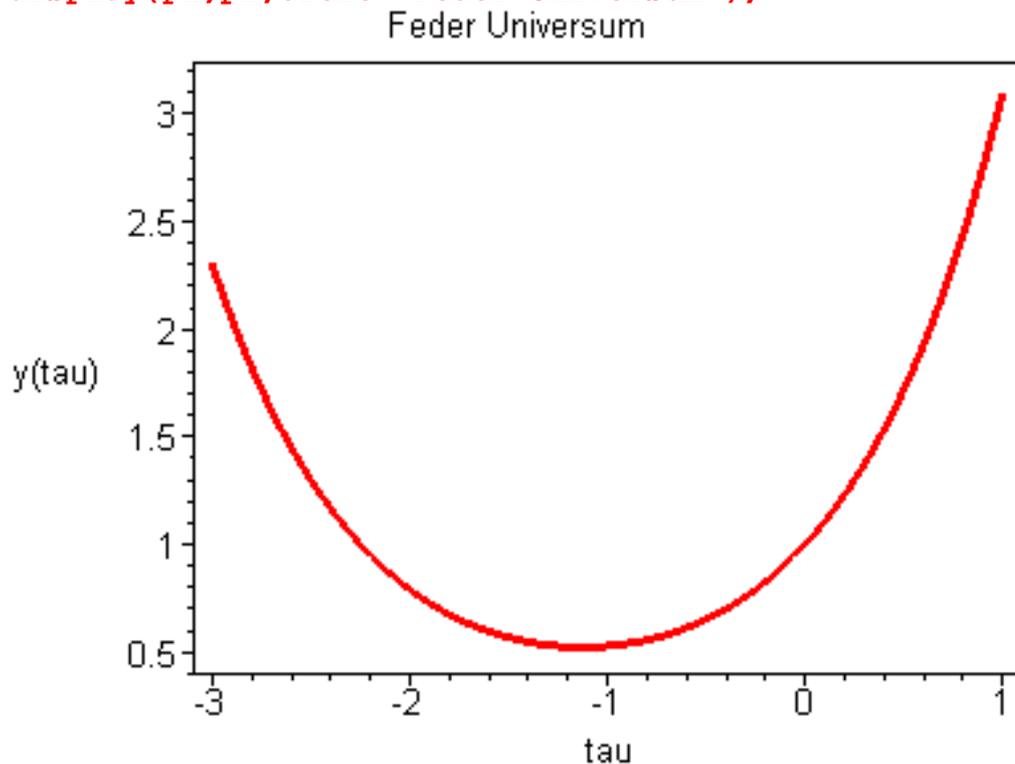
Die wichtigste Eigenschaft des oben beschriebenen nicht-statischen Modells (mit Ausnahme des des Sitter modells) ist die Anwesenheit einer Singularität zu Beginn der Expansion. Und diese Singularität ist auch am Ende der Evolution wieder denkbar. Auf der einen Seite jedoch ist diese Singularität nicht zwingend, auf der anderen Seite aber fordert das Standard Modell diesen Urknall auf Grund der enorm hohen Dichte am Anfang der Expansion. Diese extreme Dichte korrespondiert mit den Bedingungen in der unmittelbaren Umgebung der Singularität. Die Wahl der Parameter erlaubt ein Modell ohne diese Singularität

p1: Expansion  
p2: Kontraktion

```

> p1 := DEplot(subs({Omega[M]=0.1,Omega[Lambda]=
1.5},basic_4),[y(tau)],tau=-1.13..1,[[y(0)=1]],stepsize=
0.01,axes=boxed,linecolor=red,arrows=none):
  p2 := DEplot(subs({Omega[M]=0.1,Omega[Lambda]=1.5},lhs
(basic_4)=-rhs(basic_4)),[y(tau)],tau=-3..-1.14,[[y(-3)=
2.3]],stepsize=
0.01,axes=boxed,linecolor=red,arrows=none):
  display(p1,p2,title=`Feder Universum`);

```



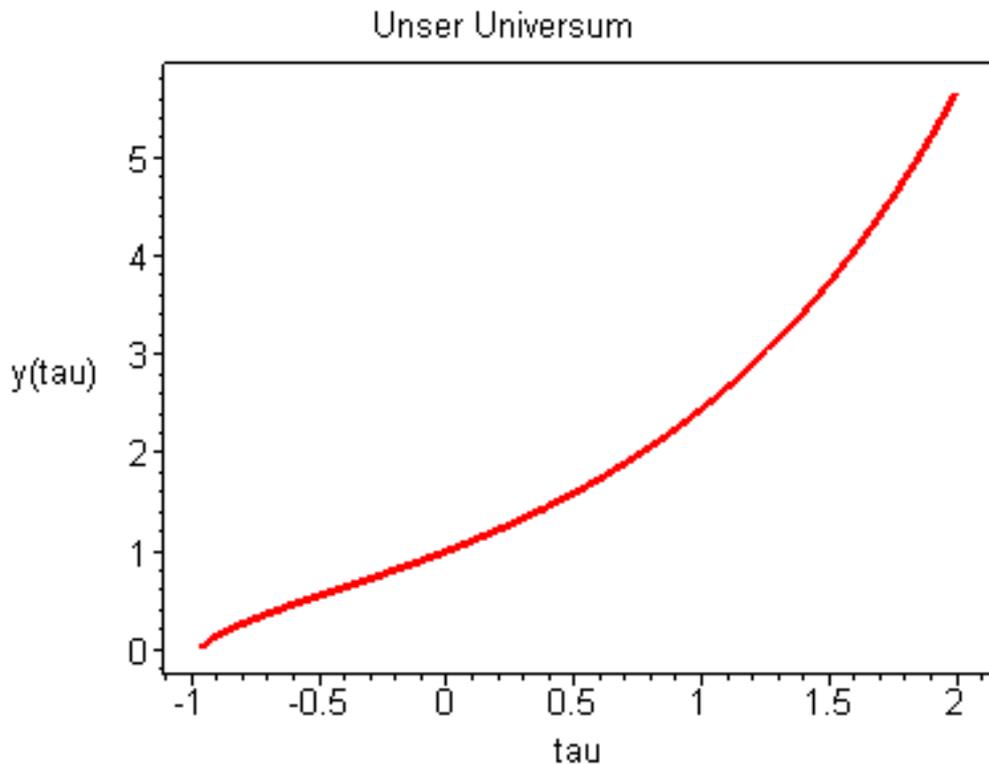
### *Unser Universum*

Die Beobachtungen der Mikrowellen Untergrundstrahlung zeigen für  $\Omega_K \sim 0$  nicht gekrümmtes Universum einen Wert von  $\Omega_\Lambda \sim 0.7$ ,  $\Omega_M \sim 0.3$ .  
Der damit zusammenhängende Skalierungsfaktor ist:

```

> DEplot(subs({Omega[M]=0.3,Omega[Lambda]=0.7},basic_4),[y
(tau)],tau=-.96..2,[[y(0)=1]],stepsize=
0.01,axes=boxed,linecolor=red,arrows=none,title=`Unser
Universum`);

```



Das ist erstmal nur eine Annahme. Das Bild der topologisch nicht trivialen Raumzeit kann Universen kombinieren, so daß über sehr viele verschiedenartige Geometrien und Dynamiken ein hypothetisches Universum "gebastelt" werden kann.

Das habe ich zum Schluß einfach einmal gemacht.

### *Der Anfang*

#### *Bianchi Modelle und das "Mixmaster" Universum*

Eine gute Übereinstimmung der isotropisch homogenen Modelle mit Beobachtungen will nicht die Gültigkeit einer Singularität am Ursprung verhindern. Wir lehnen sogar eine Isotropie des Universums am Beginn der Expansion ab. Lass uns doch mal sehen, was ein anisotropes nicht gekrümmtes Universum ohne Rotation so treibt:

#### Literatur

<http://www2.fastbot.de/red.php?red=126848302431778681518>

+<http://stacks.iop.org/0264-9381/12/51>

<http://my.linkbaton.com/get?lbCC=q&nC=q&genre=book&item=0750304057>

<http://www.argospress.com/Resources/CommunicationsSystems/book-085274370X.htm>

<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:physics/0605199>

<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:hep-th/9411237>

[http://www.aip.de/~preprint/preprints/1999/1999\\_035.html](http://www.aip.de/~preprint/preprints/1999/1999_035.html)

<http://www.conicyt.cl/bases/fondecyt/proyectos/01/2001/1010485.html>

<http://www-astro.physics.ox.ac.uk/~pgf/publications/7.pdf>

g\_compts Metrik Komponenten

```
> coord := [t, x, y, z]:  
g_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4):  
g_compts[1,1] := -1:  
g_compts[2,2] := a(t)^2:  
g_compts[3,3] := b(t)^2:  
g_compts[4,4] := c(t)^2:
```

```
g := create([-1,-1], eval(g_compts));
```

```
ginv := invert( g, 'detg' );
```

```
g := table([compts = 
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c(t)^2 \end{bmatrix}$$
, index_char = [-1, -1]])
```

Einstein Tensor

alt bekannt: erst die Zwischenwerte und der Tensor. Wir schauen uns die nicht Null Komponenten an

```
> D1g := d1metric( g, coord ):  
D2g := d2metric( D1g, coord ):  
Cf1 := Christoffel ( D1g ):  
RMN := Riemann( ginv, D2g, Cf1 ):  
RICCI := Ricci( ginv, RMN ):  
RS := Ricciscalar( ginv, RICCI ):  
Estn := Einstein( g, RICCI, RS ):  
displayGR(Einstein, Estn);
```

*The Einstein Tensor*

*non-zero components :*

$$G_{11} = - \frac{\left(\frac{d}{dt} b(t)\right)\left(\frac{d}{dt} a(t)\right) c(t) + \left(\frac{d}{dt} c(t)\right)\left(\frac{d}{dt} a(t)\right) b(t) + \left(\frac{d}{dt} c(t)\right)\left(\frac{d}{dt} b(t)\right) a(t)}{a(t) b(t) c(t)}$$

$$G_{22} = \frac{a(t)^2 \left( \left(\frac{d^2}{dt^2} b(t)\right) c(t) + \left(\frac{d^2}{dt^2} c(t)\right) b(t) + \left(\frac{d}{dt} c(t)\right)\left(\frac{d}{dt} b(t)\right) \right)}{b(t) c(t)}$$

$$G_{33} = \frac{b(t)^2 \left( \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) c(t) + \left( \frac{d^2}{dt^2} c(t) \right) a(t) + \left( \frac{d}{dt} c(t) \right) \left( \frac{d}{dt} a(t) \right) \right)}{a(t) c(t)}$$

$$G_{44} = \frac{c(t)^2 \left( \left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) b(t) + \left( \frac{d^2}{dt^2} b(t) \right) a(t) + \left( \frac{d}{dt} b(t) \right) \left( \frac{d}{dt} a(t) \right) \right)}{a(t) b(t)}$$

*character : [-1, -1]*

Im Vakuum Zustand sind die rechten Seiten der Einstein Gleichung Null, denn:

```
> E_eqn := get_compts(Estn):
e1 := numer( E_eqn[1,1] ) = 0;
e2 := expand( numer( E_eqn[2,2] )/a(t)^2 ) = 0;
e3 := expand( numer( E_eqn[3,3] )/b(t)^2 ) = 0;
e4 := expand( numer( E_eqn[4,4] )/c(t)^2 ) = 0;
e1 := -\left(\frac{d}{dt} b(t)\right)\left(\frac{d}{dt} a(t)\right) c(t) - \left(\frac{d}{dt} c(t)\right)\left(\frac{d}{dt} a(t)\right) b(t) - \left(\frac{d}{dt} c(t)\right)\left(\frac{d}{dt} b(t)\right) a(t) =
e2 := \left(\frac{d^2}{dt^2} b(t)\right) c(t) + \left(\frac{d^2}{dt^2} c(t)\right) b(t) + \left(\frac{d}{dt} c(t)\right)\left(\frac{d}{dt} b(t)\right) = 0
e3 := \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t)\right) c(t) + \left(\frac{d^2}{dt^2} c(t)\right) a(t) + \left(\frac{d}{dt} c(t)\right)\left(\frac{d}{dt} a(t)\right) = 0
e4 := \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t)\right) b(t) + \left(\frac{d^2}{dt^2} b(t)\right) a(t) + \left(\frac{d}{dt} b(t)\right)\left(\frac{d}{dt} a(t)\right) = 0
```

Wir wollen mal nach Leitungs bedingten Lösungen des Systems fahnden. Das ist bekannt unter dem Namen **Kasner Metrik**

```
> e5 := simplify( subs({a(t)=a_0*t^p_1,b(t)=b_0*t^p_2,c(t)=c_0*t^p_3},e1) );
e6 := simplify( subs({a(t)=a_0*t^p_1,b(t)=b_0*t^p_2,c(t)=c_0*t^p_3},e2) );
e7 := simplify( subs({a(t)=a_0*t^p_1,b(t)=b_0*t^p_2,c(t)=c_0*t^p_3},e3) );
e8 := simplify( subs({a(t)=a_0*t^p_1,b(t)=b_0*t^p_2,c(t)=c_0*t^p_3},e4) );
```

$$e5 := -\left(\frac{\partial}{\partial t}(b_0 t^{p-2})\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}(a_0 t^{p-1})\right)c_0 t^{p-3} - \left(\frac{\partial}{\partial t}(c_0 t^{p-3})\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}(a_0 t^{p-1})\right)b_0 t^{p-2} - \left(\frac{\partial}{\partial t}(c_0 t^{p-3})\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}(b_0 t^{p-2})\right)a_0 t^{p-1} = 0$$

$$e6 := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}(b_0 t^{p-2})\right)c_0 t^{p-3} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}(c_0 t^{p-3})\right)b_0 t^{p-2} + \left(\frac{\partial}{\partial t}(c_0 t^{p-3})\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}(b_0 t^{p-2})\right)a_0 t^{p-1} = 0$$

$$e7 := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}(a_0 t^{p-1})\right)c_0 t^{p-3} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}(c_0 t^{p-3})\right)a_0 t^{p-1} + \left(\frac{\partial}{\partial t}(c_0 t^{p-3})\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}(a_0 t^{p-1})\right)b_0 t^{p-2} = 0$$

$$e8 := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}(a_0 t^{p-1})\right)b_0 t^{p-2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}(b_0 t^{p-2})\right)a_0 t^{p-1} + \left(\frac{\partial}{\partial t}(b_0 t^{p-2})\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}(a_0 t^{p-1})\right)c_0 t^{p-3} = 0$$

Wenn  $t$  ungleich Null ist, folgt:

```
> e9 := factor( e5/t^(p_2-2+p_1+p_3) );
e10 := factor( e6/t^(p_3-2+p_2) );
e11 := factor( e7/t^(p_3-2+p_1) );
e12 := factor( e8/t^(p_2-2+p_1) );
```

$$e9 := -\frac{b_0 t^{p-2} a_0 t^{p-1} c_0 t^{p-3} (p_2 p_1 + p_3 p_1 + p_3 p_2)}{t^{(p_2-2+p_1+p_3)} t^2} = 0$$

$$e10 := \frac{b_0 t^{p-2} c_0 t^{p-3} (p_2^2 - p_2 + p_3^2 - p_3 + p_3 p_2)}{t^{(p_3-2+p_2)} t^2} = 0$$

$$e11 := \frac{a_0 t^{p-1} c_0 t^{p-3} (p_1^2 - p_1 + p_3^2 - p_3 + p_3 p_1)}{t^{(p_3-2+p_1)} t^2} = 0$$

$$e12 := \frac{a_0 t^{p-1} b_0 t^{p-2} (p_1^2 - p_1 + p_2^2 - p_2 + p_2 p_1)}{t^{(p_2-2+p_1)} t^2} = 0$$

```
> e13 := e9/(-b_0*a_0*c_0);
e14 := e10/(b_0*c_0);
e15 := e11/(a_0*c_0);
```

**e16 := e12/(a\_0\*b\_0);**

$$e13 := \frac{t^{p-2} t^{p-1} t^{p-3} (p_{-2} p_{-1} + p_{-3} p_{-1} + p_{-3} p_{-2})}{t^{(p-2-2+p-1+p-3)} t^2} = 0$$

$$e14 := \frac{t^{p-2} t^{p-3} (p_{-2}^2 - p_{-2} + p_{-3}^2 - p_{-3} + p_{-3} p_{-2})}{t^{(p-3-2+p-2)} t^2} = 0$$

$$e15 := \frac{t^{p-1} t^{p-3} (p_{-1}^2 - p_{-1} + p_{-3}^2 - p_{-3} + p_{-3} p_{-1})}{t^{(p-3-2+p-1)} t^2} = 0$$

$$e16 := \frac{t^{p-1} t^{p-2} (p_{-1}^2 - p_{-1} + p_{-2}^2 - p_{-2} + p_{-2} p_{-1})}{t^{(p-2-2+p-1)} t^2} = 0$$

Die folgenden Manipulationen ergeben eine Verbindung zwischen den Parametern

**> ((e14 + e15 + e16) - e13)/2;**

$$\begin{aligned} & \frac{t^{p-2} t^{p-3} (p_{-2}^2 - p_{-2} + p_{-3}^2 - p_{-3} + p_{-3} p_{-2})}{2 t^{(p-3-2+p-2)} t^2} \\ & + \frac{t^{p-1} t^{p-3} (p_{-1}^2 - p_{-1} + p_{-3}^2 - p_{-3} + p_{-3} p_{-1})}{2 t^{(p-3-2+p-1)} t^2} \\ & + \frac{t^{p-1} t^{p-2} (p_{-1}^2 - p_{-1} + p_{-2}^2 - p_{-2} + p_{-2} p_{-1})}{2 t^{(p-2-2+p-1)} t^2} \\ & - \frac{t^{p-2} t^{p-1} t^{p-3} (p_{-2} p_{-1} + p_{-3} p_{-1} + p_{-3} p_{-2})}{2 t^{(p-2-2+p-1+p-3)} t^2} = 0 \end{aligned}$$

Das entspricht  $p_{-1}^2 + p_{-2}^2 + p_{-3}^2 = p_{-1} + p_{-2} + p_{-3}$  (3).

**> collect(e15-e16, {p\_2, p\_3});**  
**collect(e14-e15, {p\_1, p\_2});**

$$\begin{aligned} & \frac{t^{p-1} t^{p-3} p_{-3}^2}{t^{(p-3-2+p-1)} t^2} + \frac{t^{p-1} t^{p-3} (p_{-1}-1) p_{-3}}{t^{(p-3-2+p-1)} t^2} - \frac{t^{p-1} t^{p-2} p_{-2}^2}{t^{(p-2-2+p-1)} t^2} - \frac{t^{p-1} t^{p-2} (p_{-1}-1) p_{-2}}{t^{(p-2-2+p-1)} t^2} \\ & + \frac{t^{p-1} t^{p-3} (p_{-1}^2 - p_{-1})}{t^{(p-3-2+p-1)} t^2} - \frac{t^{p-1} t^{p-2} (p_{-1}^2 - p_{-1})}{t^{(p-2-2+p-1)} t^2} = 0 \\ \\ & - \frac{t^{p-1} t^{p-3} p_{-1}^2}{t^{(p-3-2+p-1)} t^2} - \frac{t^{p-1} t^{p-3} (p_{-3}-1) p_{-1}}{t^{(p-3-2+p-1)} t^2} + \frac{t^{p-2} t^{p-3} p_{-2}^2}{t^{(p-3-2+p-2)} t^2} + \frac{t^{p-2} t^{p-3} (p_{-3}-1) p_{-2}}{t^{(p-3-2+p-2)} t^2} \\ & + \frac{t^{p-2} t^{p-3} (p_{-3}^2 - p_{-3})}{t^{(p-3-2+p-2)} t^2} - \frac{t^{p-1} t^{p-3} (p_{-3}^2 - p_{-3})}{t^{(p-3-2+p-1)} t^2} = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} p_{-3} (p_{-3} + p_{-1} - 1) &= p_{-2} (p_{-2} + p_{-1} - 1), \\ p_{-2} (p_{-3} + p_{-2} - 1) &= p_{-1} (p_{-3} + p_{-1} - 1). \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck sieht nach einer vereinfachten Lösung aus.

$$\begin{aligned} (p_{-3} + p_{-1} - 1) &= p_{-2}, (p_{-2} + p_{-1} - 1) = p_{-3} \text{ und} \\ (p_{-3} + p_{-2} - 1) &= p_{-1}, (p_{-3} + p_{-1} - 1) = p_{-2}, \\ &\text{or} \\ (p_{-3} + p_{-1} - 1) &= -p_{-2}, (p_{-2} + p_{-1} - 1) = -p_{-3} \text{ und} \\ (p_{-3} + p_{-2} - 1) &= -p_{-1}, (p_{-3} + p_{-1} - 1) = -p_{-2} \end{aligned}$$

Der erste Ausdruck ergibt:

$$\begin{aligned} & > \mathbf{p_{-3} + p_{-1} - 1 + p_{-2} + p_{-1} - 1 + p_{-3} + p_{-2} - 1 - (p_{-1} + p_{-2} + p_{-3})}; \\ & \qquad \qquad \qquad p_{-3} + p_{-1} - 3 + p_{-2} \end{aligned}$$

Der zweite Ausdruck ergibt:

$$\begin{aligned} & > \mathbf{(p_{-3} + p_{-1} - 1 + p_{-2} + p_{-1} - 1 + p_{-3} + p_{-2} - 1 + (p_{-1} + p_{-2} + p_{-3})) / 3}; \\ & \qquad \qquad \qquad p_{-3} + p_{-1} - 1 + p_{-2} \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke werden in Verbindung mit Eq(3) gebracht...siehe oben im Text auf der rechten Seite habe ich das mit (3) markiert. Das ergibt einen unabhängigen Parameter p:

loes\_1: erste Möglichkeit  
loes\_2: zweite Möglichkeit

$$\begin{aligned} & > \mathbf{erg_1 := solve(\{p_{-1} + p_{-2} + p = 1, p_{-1}^2 + p_{-2}^2 + p^2 = 1\}, \{p_{-1}, p_{-2}\});} \\ & \mathbf{loes_1 := allvalues(erg_1);} \end{aligned}$$

```
erg_2:=solve({p_1 + p_2 + p = 3, p_1^2 + p_2^2 + p^2 = 3},{p_1,p_2}):
```

```
loes_2 := allvalues(erg_2);
```

$$loes_1 := \left\{ p_1 = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3p^2 + 2p + 1}}{2}, p_2 = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3p^2 + 2p + 1}}{2} \right\},$$

$$\left\{ p_1 = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3p^2 + 2p + 1}}{2}, p_2 = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3p^2 + 2p + 1}}{2} \right\}$$

$$loes_2 := \left\{ p_1 = -\frac{p}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}I(p-1)\sqrt{3}, p_2 = -\frac{p}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}I(p-1)\sqrt{3} \right\},$$

$$\left\{ p_1 = -\frac{p}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}I(p-1)\sqrt{3}, p_2 = -\frac{p}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}I(p-1)\sqrt{3} \right\}$$

Sind die Parameter  $p_1, p_2, p_3$  reell wertig, dann erhalten wir  $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = p_1 + p_2 + p_3 = 1$  und...

```
> loes_p_1 := factor(subs(loes_1,p_1));
```

```
loes_p_2 := factor(subs(loes_1,p_2));
```

```
loes_p_3 := 1 - loes_p_1 - loes_p_2;
```

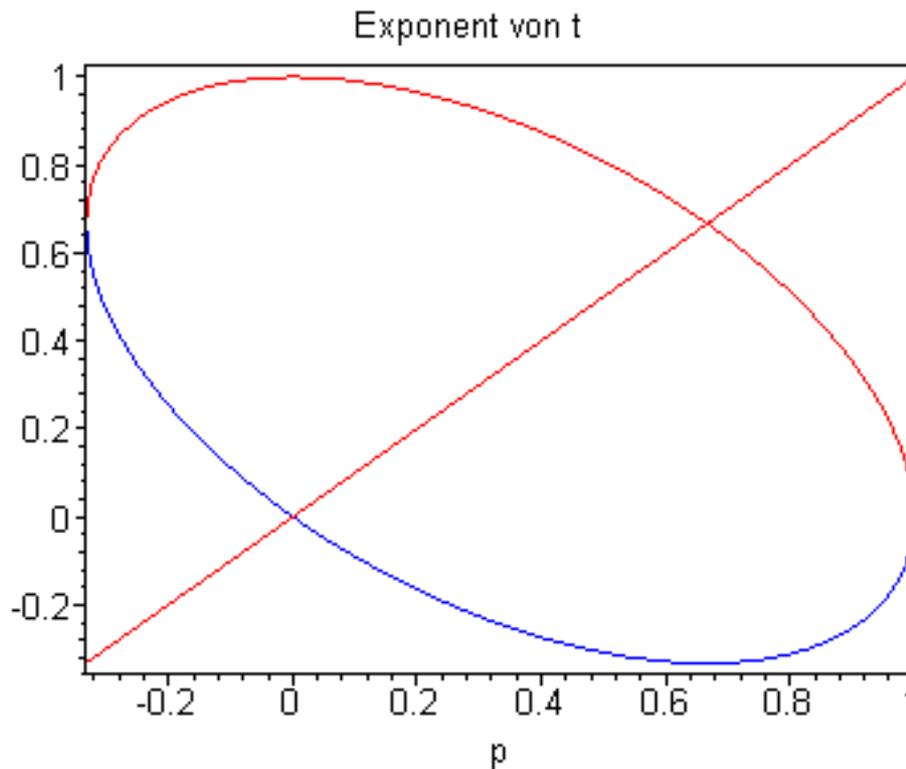
$$loes_p_1 := -\frac{p}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-(3p+1)(p-1)}}{2}$$

$$loes_p_2 := -\frac{p}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-(3p+1)(p-1)}}{2}$$

$$loes_p_3 := p$$

Diese Werte der analysierten Parameter werden im folgenden Bild dargestellt

```
> plot({loes_p_1,loes_p_2,loes_p_3},p=-1/3..1,
axes=boxed,color=[red,blue], title=`Exponent von t`);
```



Wir haben 2 Richtungen der Expansion und 1 der Kontraktion für  $t \rightarrow \infty$ . Das wird **Pfannkuchen Singularität (pancake singularity)** genannt.

oder

Wir haben 1 Richtung der Expansion und 2 der Kontraktion für  $t \rightarrow 0$ . das wird **Zigarren Singularität (cigar singularity)** genannt.

Schauen wir uns jetzt einen etwas komplizierteren Fall an:

### **die homogene anisotrope Metrik**

Wir benutzen die Tetraden Anschrift Einsteins, die uns explizite Manipulationen der Koordinaten erlaubt. Im synchronen Umfeld kennen wir die homogene Symmetrie (hier werden für 1..3 griechische Indizierungen benutzt)

Siehe: *L.D. Landau, E.M. Lifshitz, The classical theory of fields, Pergamon Press, Oxford (1962):*

$$g_{0,0} = -1, \quad g_{\alpha,\beta} = \eta_{a,b} \quad (e^a)_\alpha \quad (e^b)_\beta,$$

wobei  $\eta_{a,b}$  die zeitabhängige Matrix,

$(e^a)_\alpha$  der Rahmenvektor ( $a$  läuft von 1 bis 3, das entspricht der Anzahl der Tetraden). Wir benutzen die folgende Definition für  $\eta$ :

$a, b, c, d$  sind die zeitabhängigen Koeffizienten der anisotropischen Deformation

$$\text{kappa1}[a,b] = \text{diff}(\text{eta}[a,b],t)$$

$$\text{kappa2}[a]^b = \text{diff}(\text{eta}[a,b],t) * \text{eta\_inv}, \text{ d.h. wir heben den Index von eta\_inv}$$

```
> eta := array([[a(t)^2,0,0],[0,b(t)^2,0],[0,0,c(t)^2]]);
eta_inv := inverse(eta):
```

```
kappa1 := map(diff,eta,t):
kappa2 := multiply( map(diff,eta,t),eta_inv );
```

$$\eta := \begin{bmatrix} a(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & b(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & c(t)^2 \end{bmatrix}$$

$$\kappa_2 := \begin{bmatrix} \frac{2\left(\frac{d}{dt} a(t)\right)}{a(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\left(\frac{d}{dt} b(t)\right)}{b(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\left(\frac{d}{dt} c(t)\right)}{c(t)} \end{bmatrix}$$

Die erste Vakuum Einstein Gleichung lautet:

$$R_0^0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \kappa_a^a - \frac{1}{4} \kappa_a^b \kappa_b^a = 0$$

```
> eq_1 := evalm( -trace(map(diff,kappa2,t))/2 - trace(
multiply(kappa2,transpose(kappa2))/4) ) = 0;
```

$$eq_1 := -\frac{\frac{d^2}{dt^2} a(t)}{a(t)} - \frac{\frac{d^2}{dt^2} b(t)}{b(t)} - \frac{\frac{d^2}{dt^2} c(t)}{c(t)} = 0$$

Die nächste Einstein Gleichung fordert die Definition der **Bianchi**

**Strukturkonstanten:**  $C^{ab} = n^{ab} + e^{abc} a_c$ ,  $(C^c)_{ab} = e_{abd} C^{dc}$ .

$e_{abc} = e^{abc}$  ist das Einheits- antisymmetrische Symbol

$n^{ab}$  der symmetrische "Tensor", der durch seine prinzipiellen Werte  $n_i$  ausgedrückt werden kann

$a_c$  ist der Vektor.

Die Bianchi Typen sind::

Type	$a$	$n_1$	$n_2$	$n_3$
I	0	0	0	0
II	0	1	0	0

VII	0	1	1	0
VI	0	1	-1	0
IX	0	1	1	1
VIII	0	1	1	-1
V	1	0	0	0
IV	1	0	0	1
VII	$\zeta$	0	1	1
III ( $\zeta = 1$ ),				
VI ( $\zeta > 1$ )	$\zeta$	0	1	-1

Wir wollen den Typ IX Model analysieren, wobei  $C^{11} = C^{22} = C^{33} = C_{23}$  [1]  
 $= C_{31}$  [2] =  $C_{12}$  [3] = 1.

Die Krümmung  $P_a^b = \frac{1}{2\eta} \{ 2 C^{bd} C_{ad} + C^{db} C_{ad} + C^{bd} C_{da} - C_d^d \}$   
 $(C^b_a + C_a^b) + \delta_a^b [ (C^d)_d - 2 C^{df} C_{df} ]$  ist  
 Cab  $C^{(ab)}$   
 C\_ab  $C[ab]$   
 Ca\_b  $C^a[b]$

Es wird die Diagonalform von eta und die Symmetrie der Strukturkonstanten benutzt.

```
> Cab := array([[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]]);
C_ab := multiply(eta,eta,Cab);
Ca_b := multiply(eta,Cab);
C_a_b := multiply(Cab,eta);
delta := array([[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]]):
evalm( (4*multiply(Cab,C_ab) - trace(C_a_b)*evalm
(C_a_b+Ca_b) + delta*(trace(C_a_b)^2-2*trace(multiply
(Cab,C_ab))))/(2*det(eta)) ):
P := map(simplify,%);
```

$$Cab := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{ab} := \begin{bmatrix} a(t)^4 & 0 & 0 \\ 0 & b(t)^4 & 0 \\ 0 & 0 & c(t)^4 \end{bmatrix}$$

$$Ca_b := \begin{bmatrix} a(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & b(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & c(t)^2 \end{bmatrix}$$

$$C_{a_b} := \begin{bmatrix} a(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & b(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & c(t)^2 \end{bmatrix}$$

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{a(t)^4 - b(t)^4 + 2 b(t)^2 c(t)^2 - c(t)^4}{a(t)^2 b(t)^2 c(t)^2}, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2} \frac{-b(t)^4 + a(t)^4 - 2 a(t)^2 c(t)^2 + c(t)^4}{a(t)^2 b(t)^2 c(t)^2}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{2} \frac{-c(t)^4 + a(t)^4 - 2 a(t)^2 b(t)^2 + b(t)^4}{a(t)^2 b(t)^2 c(t)^2} \end{bmatrix}$$

Im Entartungsfall  $a = b = c, t = const$  beschreibt das Modell ein geschlossenes spärliches Universum mit einer positiven skalaren Krümmung. Somit erhalten wir die nächste Gruppe der Vakuum Einstein Gleichungen:

$$R_a^b = -\frac{1}{2\sqrt{\eta}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\eta} \kappa_a^b) \right) - P_a^b \right] = 0$$

> `evalm( -map(diff,evalm(sqrt(det(eta))*kappa2),t)/(2*sqrt(det(eta)))):`  
`evalm( map(simplify,%) - P );`

$$\left[ -\frac{\left( \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) b(t) c(t) + \left( \frac{d}{dt} b(t) \right) \left( \frac{d}{dt} a(t) \right) c(t) + \left( \frac{d}{dt} c(t) \right) \left( \frac{d}{dt} a(t) \right) b(t)}{a(t) b(t) c(t)} \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2} \frac{a(t)^4 - b(t)^4 + 2 b(t)^2 c(t)^2 - c(t)^4}{a(t)^2 b(t)^2 c(t)^2}, 0, 0 \right]$$

$$\left[ 0, -\frac{\left( \frac{d^2}{dt^2} b(t) \right) a(t) c(t) + \left( \frac{d}{dt} b(t) \right) \left( \frac{d}{dt} a(t) \right) c(t) + \left( \frac{d}{dt} c(t) \right) \left( \frac{d}{dt} b(t) \right) a(t)}{a(t) b(t) c(t)} \right.$$

$$\left[ \begin{aligned} & + \frac{1}{2} \frac{-b(t)^4 + a(t)^4 - 2 a(t)^2 c(t)^2 + c(t)^4}{a(t)^2 b(t)^2 c(t)^2}, 0 \end{aligned} \right]$$

$$\left[ \begin{aligned} & 0, 0, - \frac{\left( \frac{d^2}{dt^2} c(t) \right) a(t) b(t) + \left( \frac{d}{dt} c(t) \right) \left( \frac{d}{dt} a(t) \right) b(t) + \left( \frac{d}{dt} c(t) \right) \left( \frac{d}{dt} b(t) \right) a(t)}{a(t) b(t) c(t)} \end{aligned} \right]$$

$$\left[ \begin{aligned} & + \frac{1}{2} \frac{-c(t)^4 + a(t)^4 - 2 a(t)^2 b(t)^2 + b(t)^4}{a(t)^2 b(t)^2 c(t)^2} \end{aligned} \right]$$

Die erhaltenen Ausdrücke ergeben die 3 Einstein Gleichungen:

```
> eq_2 := Diff( (diff(a(t),t)*b(t)*c(t)),t )/(a(t)*b(t)*c
(t)) = ( (b(t)^2-c(t)^2)^2 - a(t)^4 )/(2*a(t)^2*b(t)^2*c
(t)^2);
eq_3 := Diff( (diff(b(t),t)*a(t)*c(t)),t )/(a(t)*b(t)*c
(t)) = ( (a(t)^2-c(t)^2)^2 - b(t)^4 )/(2*a(t)^2*b(t)^2*c
(t)^2);
eq_4 := Diff( (diff(c(t),t)*b(t)*a(t)),t )/(a(t)*b(t)*c
(t)) = ( (a(t)^2-b(t)^2)^2 - c(t)^4 )/(2*a(t)^2*b(t)^2*c
(t)^2);
```

$$eq\_2 := \frac{d}{dt} \left( \left( \frac{d}{dt} a(t) \right) b(t) c(t) \right) = \frac{1}{2} \frac{(b(t)^2 - c(t)^2)^2 - a(t)^4}{a(t)^2 b(t)^2 c(t)^2}$$

$$eq\_3 := \frac{d}{dt} \left( \left( \frac{d}{dt} b(t) \right) a(t) c(t) \right) = \frac{1}{2} \frac{(a(t)^2 - c(t)^2)^2 - b(t)^4}{a(t)^2 b(t)^2 c(t)^2}$$

$$eq\_4 := \frac{d}{dt} \left( \left( \frac{d}{dt} c(t) \right) b(t) a(t) \right) = \frac{1}{2} \frac{(a(t)^2 - b(t)^2)^2 - c(t)^4}{a(t)^2 b(t)^2 c(t)^2}$$

Die letzte Gruppe der Einstein Gleichungen erhalten wir aus:

$$R_a^0 = - \frac{1}{2} \kappa_b^c \left( (C^b)_{ca} - \delta_a^b (C^d)_{dc} \right) = 0$$

In unserem Fall ergibt sich, daß diese Gleichung identisch Null ist. Siehe den

Ausdruck für  $(C^b)_{ca}$ .

Die Substitution von  $a=e^\alpha, b=e^\beta, c=e^\gamma$   $dt=abc(d\tau)$  sowie der Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial t} a = \frac{\partial}{\partial \tau} a \frac{\partial}{\partial t} \tau = \frac{\partial}{\partial \tau} a \frac{1}{abc} = \frac{\partial}{\partial \tau} \alpha$$

$$\text{und } \frac{\partial^2}{\partial t^2} a = \frac{1}{abc} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \alpha \right) = \frac{1}{abc} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \alpha - \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \gamma \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \beta \right) \right]$$

vereinfacht die Niederschrift:

```
> eq_1 := diff((alpha(tau)+beta(tau)+gamma(tau)), tau$2)/2
= diff(alpha(tau), tau)*diff(beta(tau),tau) + diff(alpha
(tau),tau)*diff(gamma(tau),tau) + diff(beta(tau),tau)
*diff(gamma(tau),tau);
eq_2 := 2*diff(alpha(tau),tau$2) = (b(t)^2-c(t)^2)^2-a(t)
^4;
eq_3 := 2*diff(beta(tau),tau$2) = (a(t)^2-c(t)^2)^2-b(t)^
4;
eq_4 := 2*diff(gamma(tau),tau$2) = (a(t)^2-b(t)^2)^2-c(t)
^4;
```

$$eq_1 := \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\tau^2} \alpha(\tau) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\tau^2} \beta(\tau) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\tau^2} \gamma(\tau) \right) =$$

$$\left( \frac{d}{d\tau} \alpha(\tau) \right) \left( \frac{d}{d\tau} \beta(\tau) \right) + \left( \frac{d}{d\tau} \alpha(\tau) \right) \left( \frac{d}{d\tau} \gamma(\tau) \right) + \left( \frac{d}{d\tau} \beta(\tau) \right) \left( \frac{d}{d\tau} \gamma(\tau) \right)$$

$$eq_2 := 2 \left( \frac{d^2}{d\tau^2} \alpha(\tau) \right) = (b(t)^2 - c(t)^2)^2 - a(t)^4$$

$$eq_3 := 2 \left( \frac{d^2}{d\tau^2} \beta(\tau) \right) = (a(t)^2 - c(t)^2)^2 - b(t)^4$$

$$eq_4 := 2 \left( \frac{d^2}{d\tau^2} \gamma(\tau) \right) = (a(t)^2 - b(t)^2)^2 - c(t)^4$$

Ein Vergleich der so erhaltenen Lösungen mit den oben erwähnten Kasner Typ, zeigt, daß diese Systeme identisch sind, wenn die rechten Seiten der Gleichungen  $eq_2$ ,  $eq_3$  und  $eq_4$  gleich Null sind. Deshalb nehmen wir die Evolution eines solchen Systems als Dynamik von Kasner Lösungs Perturbationen an.

Im Fall:  $\tau = \ln(t) + const$   $(dt=abc d\tau = t^{(p_1+p_2+p_3)} d\tau)$ , ergibt sich dann  $d$

$$\tau = \frac{dt}{t} \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \alpha = p_1, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \beta = p_2, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \gamma = p_3.$$

Wir nehmen an, daß die rechten Seiten der Lösungen nahe Null sind, aber der Beitrag des Terms  $e^{(4\alpha)}$  dominiert. Dann folgt:

```
> eq_5 := diff(alpha(tau), `\$`(tau,2)) = -exp(4*alpha
(tau))/2;
eq_6 := diff(beta(tau), `\$`(tau,2)) = exp(4*alpha(tau))/2;
eq_7 := diff(gamma(tau), `\$`(tau,2)) = exp(4*alpha
(tau))/2;
```

$$eq_5 := \frac{d^2}{d\tau^2} \alpha(\tau) = -\frac{1}{2} e^{(4\alpha(\tau))}$$

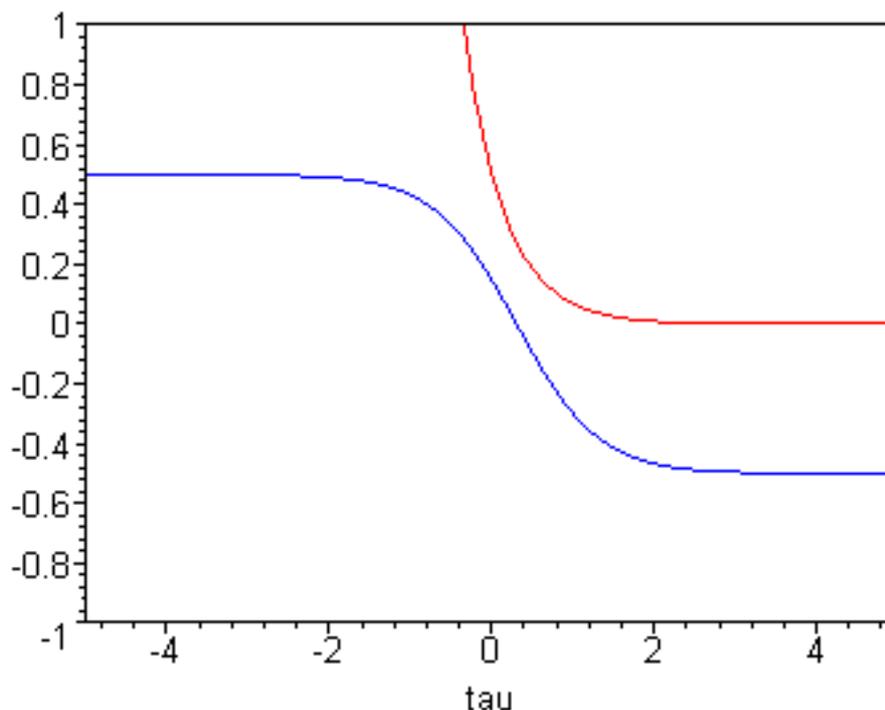
$$eq_6 := \frac{d^2}{d\tau^2} \beta(\tau) = \frac{1}{2} e^{(4\alpha(\tau))}$$

$$eq_7 := \frac{d^2}{d\tau^2} \gamma(\tau) = \frac{1}{2} e^{(4\alpha(\tau))}$$

Die erste Gleichung ist analog der Gleichung, welche die eindimensionale Bewegung ( $\alpha$  ist die Koordinate) unter Mitwirkung der exponential Grenze beschreibt.

```
> p:= dsolve({eq_5,alpha(5)=-2,D(alpha)(5)=-0.5},alpha
(tau),type=numeric):
> with(plots):
odeplot(p,[tau,diff(alpha(tau),tau)],-5..5,color=blue):
plot(exp(4*(-0.5)*tau)/2,tau=-5..5,color=red):
display(%,%%,view=-1..1,axes=boxed, title=`Reflection sn
der Grenzschicht`);
```

## Reflection an der Grenzschicht



Wir sehen, daß die Partikel mit Anfangsgeschwindigkeit  $p_1 = -0.5$  (blaue Kurve) an der Grenzschicht (rote Kurve) reflektiert werden und auch einen Vorzeichenwechsel erfahren. Aber die Gleichungen  $eq_5, eq_6, eq_7$  ergeben in  $p_1 + p_2 = const$ ,  $p_1 + p_3 = const$  und damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 (p^{new})_2 &= p_2 + p_1 & (p^{new})_1 &= p_2 + 2 p_1 & (p^{new})_3 &= p_3 + p_1 \\
 (p^{new})_1 & & & & & \\
 (p^{new})_1 &= p_3 + 2 p_1 & & & & \\
 & & & & & ((1+2p_1)\tau) \\
 t &= a b c = e & & & & 
 \end{aligned}$$

und ferner::

$$a = t^{\left(-\frac{p_1}{1+2p_1}\right)}, \quad b = t^{\left(\frac{p_2+2p_1}{1+2p_1}\right)}, \quad c = t^{\left(\frac{p_3+2p_1}{1+2p_1}\right)}$$

Die folgende Prozedur zeigt einen numerischen Algorithmus zur Iteration des Exponenten von t auf:

```

> iterations := proc(iter,p)
p_1_old := evalhf( -1/2*p+1/2-1/2*sqrt(-(3*p+1)*(p-1)) );
p_2_old := evalhf( -1/2*p+1/2+1/2*sqrt(-(3*p+1)*(p-1)) );
p_3_old := evalhf( p );

for m from 1 to iter do
  if(p_1_old<0) then
    pp := evalhf(1+2*p_1_old):
    p_1_n := evalhf(-p_1_old/pp):
    p_2_n := evalhf((p_2_old+2*p_1_old)/pp):
    p_3_n := evalhf((p_3_old+2*p_1_old)/pp):
  
```

```

else fi:

if(p_2_old<0) then
pp := evalhf(1+2*p_2_old):
p_1_n := evalhf((p_1_old+2*p_2_old)/pp):
p_2_n := evalhf(-p_2_old/pp):
p_3_n := evalhf((p_3_old+2*p_2_old)/pp):
else fi:

if(p_3_old<0) then
pp := evalhf(1+2*p_3_old):
p_1_n := evalhf((p_1_old+2*p_3_old)/pp):
p_2_n := evalhf((p_2_old+2*p_3_old)/pp):
p_3_n := evalhf(-p_3_old/pp):
else fi:

p_1_old := p_1_n:
p_2_old := p_2_n:
p_3_old := p_3_n:
if m = iter then pts := [p_1_old, p_2_old,p_3_old]
fi;
od:
pts
end:
Warning, `p_1_old` is implicitly declared local to procedure
`iterations`

Warning, `p_2_old` is implicitly declared local to procedure
`iterations`

Warning, `p_3_old` is implicitly declared local to procedure
`iterations`

Warning, `m` is implicitly declared local to procedure `iterations`

Warning, `pp` is implicitly declared local to procedure `iterations`

Warning, `p_1_n` is implicitly declared local to procedure
`iterations`

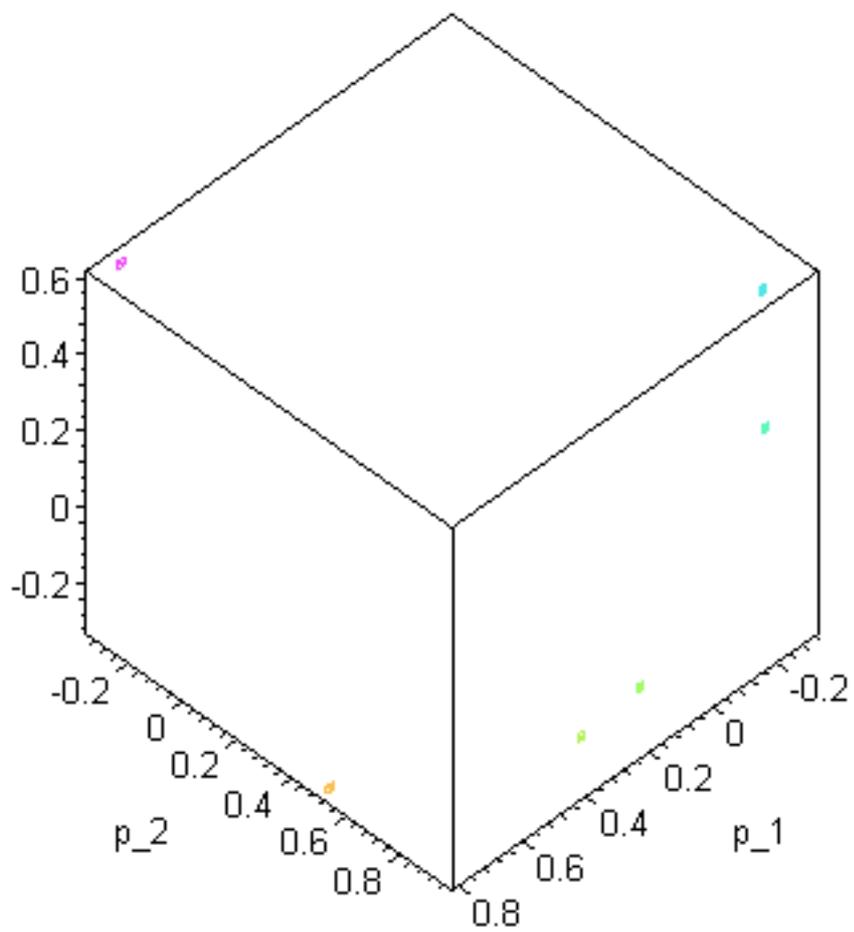
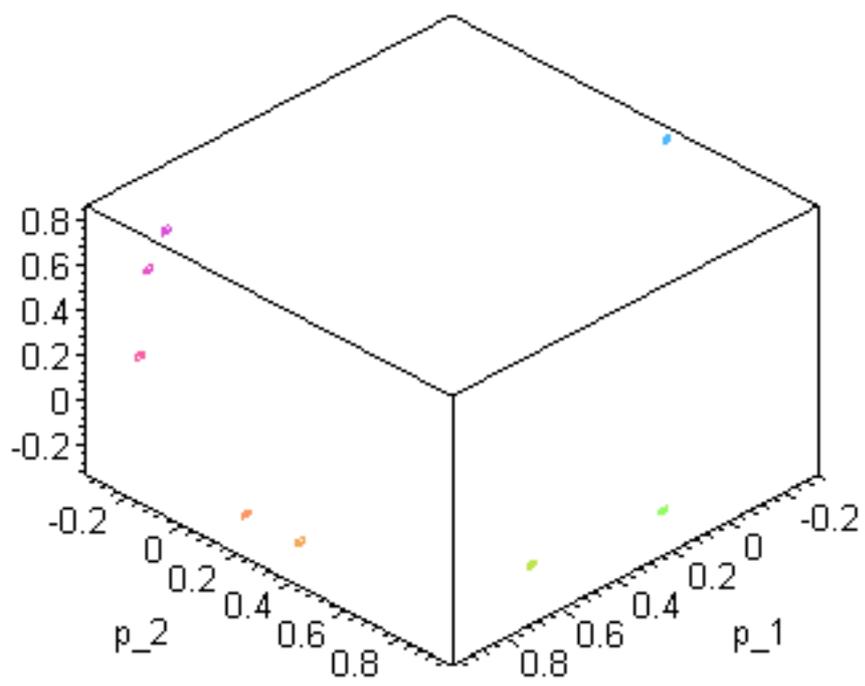
Warning, `p_2_n` is implicitly declared local to procedure
`iterations`

Warning, `p_3_n` is implicitly declared local to procedure
`iterations`

Warning, `pts` is implicitly declared local to procedure `iterations`

> with(plots):
pointplot3d({seq(iterations(i,0.6), i=1 ..
8)},symbol=diamond,axes=BOXED,labels=[p_1,p_2,p_3]);
pointplot3d({seq(iterations(i,0.6), i=7 ..
12)},symbol=diamond,axes=BOXED,labels=[p_1,p_2,p_3]);

```



Wir sehen, daß die Evolution Eigenschaften eines Umschaltens zwischen verschiedenen Kasner Epochen zeigt (alle Punkte liegen auf der Sektion der Sphäre mit:  $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$  in der Ebene  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ ).

Der negative Exponent von  $t$  vergrößert den zugehörigen Skalierungsfaktor wenn  $t$  gegen Null strebt. In der ersten Darstellung oben finden diese Vorzeichenwechsel zwischen den  $y$ - und  $z$ - Richtungen statt.

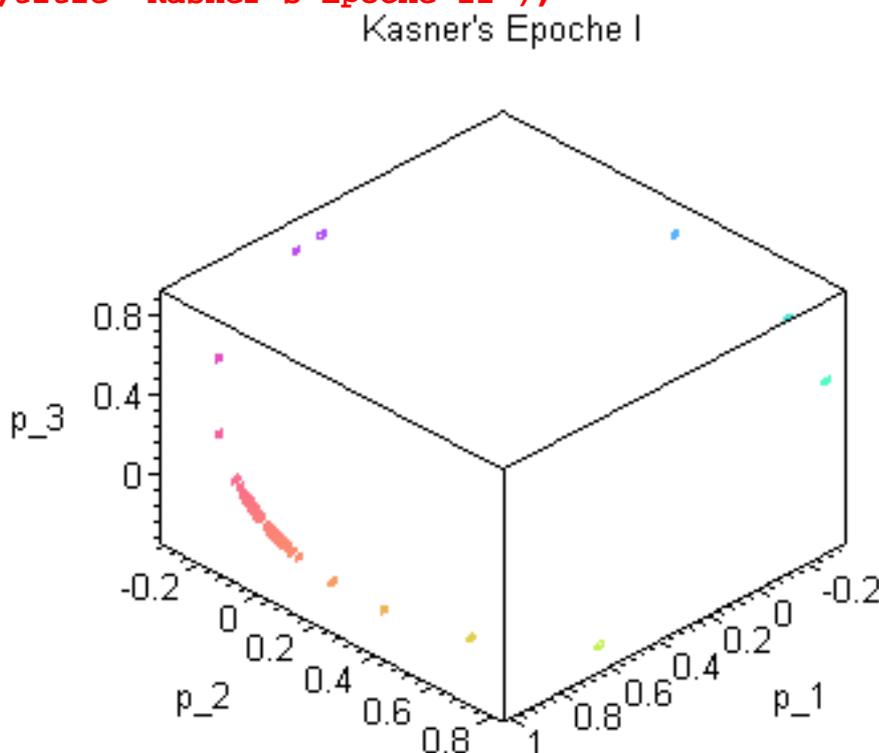
**Das Universum schwingt in diesen Richtungen und kontrahiert monoton in  $x$ -Richtung, bei Streben von  $t$  gegen Null.**

In der darunter befindlichen Darstellung werden die  $x$ - $z$  Schwingungen durch Kontraktion in der  $y$ -Richtung unterstützt.

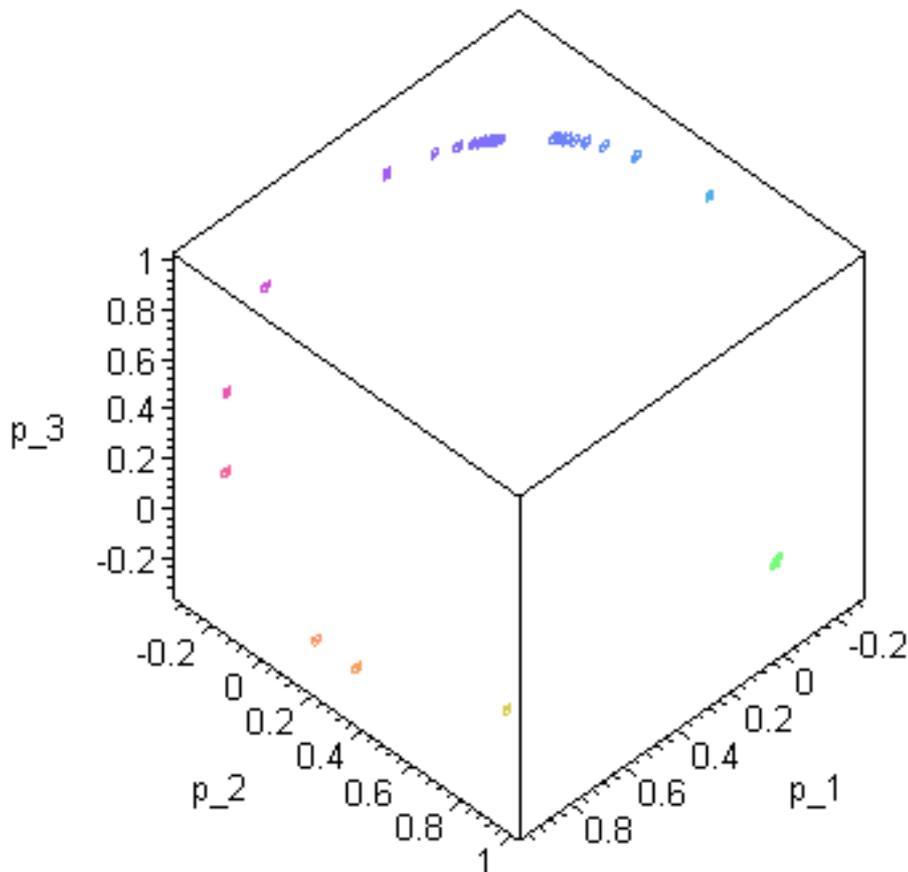
**Das gesamte Bild zeigt das Umschalten zwischen verschiedenen Schwingungen als Ergebnis der logarithmischen Annäherung an die Singularität.**

Es ist wichtig, daß hier eine starke Abhängigkeit zur Anfangsbedingung besteht, denn diese bedingt den chaotischen Charakter dieser Art von Schwingung.

```
> pointplot3d({seq(iterations(i,0.601), i=
1..100)},symbol=diamond,axes=BOXED,labels=[p_1,p_2,p_
3],title=`Kasner's Epoche I`);
pointplot3d({seq(iterations(i,0.605), i=
1..100)},symbol=diamond,axes=BOXED,labels=[p_1,p_2,p_
3],title=`Kasner's Epoche II`);
```



## Kasner's Epoche II



Abschließend läßt sich sagen, daß die Abweichung von der Isotropie das ganze Szenario der Evolution des Universums in der Nähe der Singularität verändert. Wir erhalten eine chaotische Schwingungsdynamik auf Grund des Verhaltens nichtlinearer Systeme. Das wird **Mixmaster Universum** genannt.

Literatur:

[http://www.osti.gov/energycitations/product.biblio.jsp?osti\\_id=5961600](http://www.osti.gov/energycitations/product.biblio.jsp?osti_id=5961600)

<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:astro-ph/9412043>

[http://prola.aps.org/abstract/PRD/v32/i10/p2522\\_1](http://prola.aps.org/abstract/PRD/v32/i10/p2522_1)

<http://fastbot.de/red.php?red=12684845258625996702>

+<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.72.084021>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Einstein-Gleichungen>

<http://www.feliz.de/einstein.pdf>

[http://www.damtp.cam.ac.uk/user/gr/about/members/barrow\\_pub\\_aug05.pdf](http://www.damtp.cam.ac.uk/user/gr/about/members/barrow_pub_aug05.pdf)

<http://www.deutsches-fachbuch.de/reinschauen/d2/3593377748.htm>

## ***Inflation***

Das oben vorgestellte Standard homogene Modell zeigt die Notwendigkeit des

Ereignishorizonts. Die Homogenität dieses Universumstyps folgt aus den kausalen Zusammenhängen zwischen der verschiedenen Gebieten. Jedoch wird der Abstand dieser Gebiete durch die Zeit der Expansion bestimmt. Wir versuchen einmal den maximalen Abstand der Lichtausbreitung für einen Signaltransport innerhalb dieser Gebiete zu berechnen. Solange  $ds^2 = 0$  ist, wird die zugehörige radiale Koordinate des Horizonts die folgende sein:

$t_0$  bezeichnet das Alter des Universums

`> r = Int(1/a(t),t=0..t0);`

oder auch

`r = Int(1/y(tau),tau=-t0*H0..0)/(a0*H0);`

$$r = \int_0^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt$$

$$r = \frac{1}{a_0 H_0} \int_{-t_0 H_0}^0 \frac{1}{y(\tau)} d\tau$$

Im Einstein-de Sitter Modell fanden wir: Wir benutzen die oben vorgestellten Ausdrücke in diesem Modell

`> int( subs(y(tau)=1/4*(12*tau+8)^(2/3),1/y(tau)), tau=-2/3..0)/(a0*H0):`

`simplify( subs(a0=1/4*(12*0+8)^(2/3),%),radical );`

$$\frac{2}{H_0}$$

und im Friedmann-Lemaitre:

$b = \Omega[M] - 1 = \Omega[K]$  and  $K = -1$  (spherisches Universum)

`> int( subs(y(phi)=Omega[M]*(1-cos(2*phi))/(2*b),1/2*Omega[M]*(2-2*cos(2*phi))/(b^(3/2))/y(phi)),phi )/a0/H0;# we use the above obtained expressions for this model`

`simplify( subs(K=-1,subs(b=-K/a0^2/H0^2,%),radical,symbolic );`

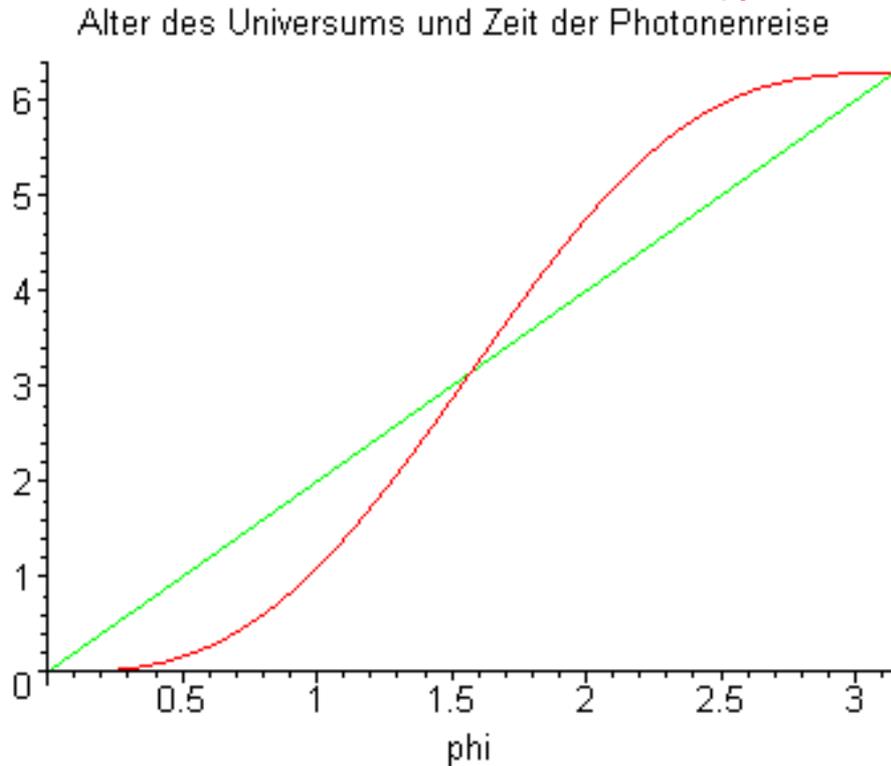
$$\frac{2 \phi}{\sqrt{b} a_0 H_0}$$

$$2 \phi$$

Das letzte Beispiel interessiert uns:

Wenn  $\phi$  von 0 nach  $\pi/2$  vergrößert wird, dann korrespondiert das mit der Expansion des Universums bis hin zu seinem maximalen Radius. Im Moment des maximalen Expansions kann ein Beobachter Photonen vom Gegenpol des Universums beobachten. Das entspricht der Bildung der vollständigen kausalen Verknüpfungen.

```
> plot([2*phi-sin(2*phi),2*phi],phi=0..Pi, title=`Alter des Universums und Zeit der Photonenreise`);
```



Dieses Bild zeigt das Alter des Friedmann-Lemaître Universums im Vergleich der Zeit für eine Photonen Ausbreitung vom entferntesten Punkt des Universums. Für  $\phi < \pi/2$  ergeben sich Gebiete, die sich nicht mit uns verbinden werden. Hinter diesen Punkten jedoch finden wir kausale Verbindungen. Im Moment des Beginns der Kontraktion werden die Elektronen eine komplette Umdrehung rund um das Universum durchführen. Die verschiedenartigen Möglichkeiten wurden entwickelt um das Problem des Horizonts in den Griff zu bekommen. Aber die meisten der populären Modelle basieren auf dem Inflation Szenario, das ebenso die globale Krümmungsfreiheit des Universums erklärt. Damit das Horizont Problem überwunden werden kann, müssen wir die angenommene beschleunigte Expansion

mit  $\frac{d^2}{dt^2} a(t) > 0$  annehmen. Als Ergebnis dieser Bedingung finden wir, daß die ursprüngliche kausale Verbindung der Gebiete schneller expandieren wird, als es der Horizont tut. Wir beobachten also Licht aus den Gebieten, die zu einer früheren Zeit der Evolution des Universums verbunden waren. Im Unterkapitel "Standard Modelle" haben wir aus den Einstein Gleichungen die Energie Erhaltung aus basic\_2 geholt:

$$\frac{d^2}{dt^2} a(t) = -4 \pi \left( p(t) + \frac{\rho(t)}{3} \right) + \frac{\Lambda}{3}$$

Diese Gleichung zeigt, daß die gewöhnlichen Bedingungen  $p > 0$  für den Druck der

Ursprung der Gravitation sind, aber wenn  $p < -\frac{\rho}{3}$  ( $\Lambda = 0$ ) oder  $\Lambda > 4\pi\rho$  ( $p=0$ ) dann dominiert die Zurückbewegung und die Expansion wird sich weiter beschleunigen. Als Quelle dieser Zurückbewegung wird das skalare Inflationfeld  $\phi$  angesehen. Wir probieren es für dieses homogene Feld mal mit einem einfachen Lagrange Ansatz:

$$L = -\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} g^{ij} - V(\phi),$$

worin  $V$  die potentielle Energie ist. Diese bereits hier vorgestellte Prozedur erlaubt es von diesem Lagrange Ansatz die Feld Gleichungen zu erhalten:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{-g} g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} V = 0.$$

Im Falle einer flachen RW Metrik finden wir die Gleichungen:

g: Definition der flachen RW Metrik

```
> coord := [t, r, theta, phi]:
g_compts := array(symmetric,sparse,1..4,1..4):
g_compts[1,1] := -1:
g_compts[2,2] := a(t)^2:
g_compts[3,3] := a(t)^2*r^2:
g_compts[4,4] := a(t)^2*r^2*sin(theta)^2:
g := create([-1,-1], eval(g_compts)):
dlg := dlmatrix(g, coord):
g_inverse := invert(g, 'detg'):
Cf1 := Christoffel1 ( dlg ):
Cf2 := Christoffel2 ( g_inverse, Cf1 ):
det_scal := simplify( sqrt( -det( get_compts(g) ) )
),radical,symbolic ):
g_det_sq := create([], det_scal): sqrt(-g)
field := create([], phi(t)): Feld
```

Berechnung des ersten Terms in den Feldgleichungen

```
cov_diff( field, coord, Cf2 ):
T := prod(g_inverse,%):
contract(T,[2,3]):
Tt := prod(g_det_sq,%):
Ttt := cov_diff( Tt, coord, Cf2 ):
get_compts(%)[1,1]/det_scal:
expand(-%):
field_eq := % + diff(V(phi),phi) = 0;
```

$$field\_eq := \frac{3 \left( \frac{d}{dt} \phi(t) \right) \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)}{a(t)} + \left( \frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right) + \left( \frac{d}{d\phi} V(\phi) \right) = 0$$

Wir definieren jetzt den Energie-Impuls Tensor für die erste Einstein Gleichung:

$$T_{ij} = g_{ij} L - g_{jl} f_{x_i} \frac{\partial L}{\partial f_{x_l}}$$

worin  $f_{x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ . Die Konsequenz ist,  $\rho = [-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + V(\phi)] + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + V(\phi)$ , und (for  $i, j = 1, 2, 3$ )  $T_{ij} = g_{ij} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - V(\phi)\right) \rightarrow p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - V(\phi)$ .

Die letzte Gleichung impliziert die notwendige Bedingung  $p < -\frac{\rho}{3}$ , welche aus großen Potentialwerten  $V$  resultiert. Die Dynamik unseres Systems wird durch folgende gekoppelte Gleichungen bestimmt:

```
> basic_inf_1 := K/(a(t)^2)+diff(a(t),t)^2/(a(t)^2) = 8/3
*Pi*(1/2*diff(phi(t),t)^2+V(phi));
basic_inf_2 := field_eq;
```

$$basic\_inf\_1 := \frac{K}{a(t)^2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} a(t)\right)^2}{a(t)^2} = \frac{8}{3} \pi \left( \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \phi(t)\right)^2 + V(\phi) \right)$$

$$basic\_inf\_2 := \frac{3 \left(\frac{d}{dt} \phi(t)\right) \left(\frac{d}{dt} a(t)\right)}{a(t)} + \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(t)\right) + \left(\frac{d}{d\phi} V(\phi)\right) = 0$$

Die Bedeutung vom  $K$  wurde bereits erklärt. Wir nehmen hier einmal an  $K=0$ , d.h.

lokale Krümmungsfreiheit. In einer langsam aufschaukelnden Näherung  $\frac{d^2}{dt^2} \phi(t)$ ,

$\left(\frac{d}{dt} \phi(t)\right)^2 \rightarrow 0$  sowie für das Potential  $V(\phi) = \frac{m \phi^2}{2}$  erhalten wir:

```
> basic_inf_1_n := subs(K=0,K/(a(t)^2)+diff(a(t),t)^2/(a
(t)^2)) = 8/3*Pi*m^2*phi(t)^2/2; basic_inf_2_n := op
(1,lhs(field_eq))+
subs(phi=phi(t),
expand(subs(V(phi)=m^2*phi^2/2,op(3,lhs(field_eq))))=0;
```

$$basic\_inf\_1\_n := \frac{\left(\frac{d}{dt} a(t)\right)^2}{a(t)^2} = \frac{4}{3} \pi m^2 \phi(t)^2$$

$$\text{basic\_inf\_2\_n} := \frac{3 \left( \frac{d}{dt} \phi(t) \right) \left( \frac{d}{dt} a(t) \right)}{a(t)} + m^2 \phi(t) = 0$$

> `dsolve({basic_inf_1_n,basic_inf_2_n,phi(0)=phi0,a(0)=a0},{phi(t),a(t)}):`  
`expand(%);`

$$\left\{ a(t) = \frac{e^{\left(\frac{-m^2 t^2}{6}\right)} a_0}{e^{\left(\frac{-2\phi_0 \sqrt{\pi} m \sqrt{3} t}{3}\right)}}, \phi(t) = -\frac{\sqrt{3} m t}{6 \sqrt{\pi}} + \phi_0 \right\}$$

Man erkennt, daß für  $\phi_0 \gg 1$  ein quasi-exponentieller Anstieg = Inflation des Universums vorhanden ist.

$$a(t) = a_0 e^{(Ht)}, \text{ where } H = 2 \sqrt{\frac{\pi}{3}} \phi_0 m$$

Ist  $t \sim \frac{2 \sqrt{3} \pi}{m} \phi_0$  dann endet auch diese langsame Aufschaukelung und die potentielle Energie konvertiert in kinetische Energie. Das wird einen lawinenartigen Anstieg der Bildung anderer Partikel aus dem Vakuum heraus nachsich ziehen. Man spricht von einer **nach-Aufheizung**, hier ist der englische Begriff "**reheating**" gebräuchlich. Nur dieser Moment des Szenarios ist dem Urknall ähnlich! Wie verhält es sich nun mit der Größe des Universums nach der Inflation?

> `a(t)=subs( {H=2*sqrt(Pi/3)*phi[0]*m,t=2*sqrt(3*Pi)/m*phi[0]},a[0]*exp(H*t) );`

$$a(t) = a_0 e^{\left(4 \pi \phi_0^2\right)}$$

Wenn zu Beginn der Inflation die Energie und die Ausdehnung des Universums durch die Planck Dichte und Länge bestimmt wird, dann wird  $m^2 (\phi^2)_0 \sim 1, a_0 \sim 10^{(-33)} \text{ cm}$ . Der wahrscheinliche Wert von  $m \sim 10^{(-6)}$  ist bedingt durch den Wert der Fluktuation der Hintergrundstrahlung ( $\sim 10^{(-5)}$ ).

Als Ergebnis erhalten wir:  $a \sim 10^{(-33)} e^{\left(\frac{4 \pi}{m^2}\right)} = 10^{(-33)} e^{(4 \pi 10^{12})} \text{ cm}$ . Das ist viel größer als unser beobachtetes Universum. Daraus leitet sich die Aussage ab, warum wir behaupten, daß das beobachtete Universum keine Krümmung aufweist und homogen und isotrop ist. Kommen wir zurück zur Gleichung basic\_inf\_2. Das Ergebnis der Wiederaufheizung aus der Schwingung des inflationären Feldes um das Potential Minimum herum erzeugt neue Bosonen p-Partikel. Diese dämpfen die

Schwingung, so daß wir einen Dämpfungsterm in Gleichung basic\_inf\_2 erwarten können:

```
> reh_inf := 3*diff(phi(t),t)*H+Gamma*diff(phi(t),t)+diff(phi(t),`$`(t,2)) = -m^2*phi(t);
```

$$reh\_inf := 3 \left( \frac{d}{dt} \phi(t) \right) H + \Gamma \left( \frac{d}{dt} \phi(t) \right) + \left( \frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right) = -m^2 \phi(t)$$

Hierin ist H die Hubble Konstante.  $\Gamma$  die Dämpfungsrate, welche durch die Wechselwirkung zwischen Materie und Bosonen Feld erklärt wird. Ist  $H > \Gamma$ , dann haben wir kohärente Schwingung:

```
> dsolve(subs(Gamma=0,reh_inf),phi(t));
diff(%,t);
```

$$\phi(t) = -C1 e^{\left( \left( -\frac{3H}{2} + \frac{\sqrt{9H^2 - 4m^2}}{2} \right) t \right)} + -C2 e^{\left( \left( -\frac{3H}{2} - \frac{\sqrt{9H^2 - 4m^2}}{2} \right) t \right)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi(t) = & -C1 \left( -\frac{3H}{2} + \frac{\sqrt{9H^2 - 4m^2}}{2} \right) e^{\left( \left( -\frac{3H}{2} + \frac{\sqrt{9H^2 - 4m^2}}{2} \right) t \right)} \\ & + -C2 \left( -\frac{3H}{2} - \frac{\sqrt{9H^2 - 4m^2}}{2} \right) e^{\left( \left( -\frac{3H}{2} - \frac{\sqrt{9H^2 - 4m^2}}{2} \right) t \right)} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung zeigt die Abnahme der Energie bei zunehmender Zeit  $\rho \sim$

$\left( \frac{\partial}{\partial t} \phi \right)^2$  und als Ergebnis die Abnahme der Hubble Konstante H. Das führt dann zu:  $H < \Gamma$ , welches wiederum den Beginn des Rückwärtsaufheizens zeigt.

## Zusammenfassung

Es wurden kosmologische Modelle und deren Aussagen vorgestellt. Es geht hierbei darum, einen Ansatz dafür zu finden, wie sich unser Universum verhält. Haben wir einen solchen Ansatz wirklich erreicht und verstanden, dann erst werden wir in der Lage sein, die verschiedenartigen Ideen des Ursprungs der Gravitation, der Wechselwirkungen untereinander usw. zu bewerten und die Theorie zur dominanten erklären, die es dann verdient hat.

**Das liebe Freunde ist einen Nobel Preis wert!**

Und bis dahin verbleibt unseren Stringern, unseren Schleifen-Quantlern, unseren Branern etc genügend Zeit sich weiter zu streiten.

Dauer dieser Arbeit: September 2005 bis Dezember 2006

Dr. Wilfried Tenten