Das gestörte Problem

Dr.Wilfried Tenten
13.07.2009

Eine kleine Abhandlung fürs Forum

Dr. W. Tenten
13. 7. 09
– 1 –

gestörtes Problem

– Konditionierung –

Allgemeine Begriffe

Daten D werden geändert in gestörte Daten $\bar{D}$.

Die Abweichung von Lösung X zur Lösung $\bar{X}$ wird mit $|X - X_{real}|$ bezeichnet.

Konditionszahl

absolut

Empfindlichkeit der Lösung x ggü. Datenänderungen

$$|\bar{x} - x| \le b \cdot |\bar{D} - D|$$

=> kleinstmöglicher Fehler

$$k = \inf\{ b : |\bar{x} - x| \le b \cdot |\bar{D} - D| \text{ mit } D, \bar{D} \in \text{Datenmenge}$$

k kann damit als absolute Konditionszahl des Problems betrachtet werden.

relativ

Relative Änderungen des Ergebnisses können geschätzt werden:

$$\frac{|\tilde{x}_r - x_r|}{|x_r|} \le K \frac{|\tilde{D}_r - D_r|}{|D_r|}$$

r indiziert "relativ".

Bedeutung. Eine Konditionszahl $K = m$ für eine Wirkung a auf y bedeutet daß sich bei einer Änderung von a um z.B. 1% das Ergebnis möglicherweise um m% ändern kann.

Berechnung der Gesamtfehlerempfindlichkeit verlangt daß die relativen Änderungen geeignet zusammengesetzt werden können. Bei der Konditionszahl kommt es im Wesentlichen auf die Größe und nicht auf deren Exaktheit an. Liegt der Kehrwert der K'zahl in gleicher Größenordnung. unsicheres!!

Rundsänderungen

Nichtlineare Probleme:

↳ linearisieren in Teilbereiche eventuell dann die Teil-K'zahlen als Mittelwert zur K'zahl. zusammenlegen

$$K = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{Teil,i}$$

Konditionszahl durch Differentiation

Änderungen → Differentiation.

f sei stetig differenzierbare Abbildung.

$y = f(a)$; $\tilde{a} = a + \Delta a$

$$\tilde{y} = f(\tilde{a}) = f(a+\Delta a) = f(a) + f'(\bar{a})\cdot\Delta a$$
$$= y + \Delta y$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta y = \tilde{y} - y = f'(\bar{a})\cdot\Delta a \\ \dfrac{\Delta y}{y} = \dfrac{a f'(\bar{a})}{f(a)}\cdot\dfrac{\Delta a}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow K_{y\leftarrow a} := \left|\frac{a f'(\bar{a})}{f(a)}\right| \approx$$

$K_{y\leftarrow a}(B)$

Beispiel

quadr. Gleichung

$$y^2 + a_1 y + a_0 = 0$$

$a_1^2 - 4a_0 > 0$ Zuordnung $a_{0,1} \to y_{1,2}$

$$y_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{a_1^2 - 4a_0} - a_1}{2}$$

$K_{y_i \leftarrow a}$ über $\frac{\partial y_i}{\partial a_i}$

$$\frac{\partial y_i}{\partial a_1} = \frac{1}{2}\left(\pm \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}} - 1\right) = \frac{\pm a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial a_1} = -\frac{y_1}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial a_1} = \frac{y_2}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial a_0} = -\frac{1}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial a_0} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}$$

Konditionszahlen

$K_{y_j \leftarrow a_i}$

$$K_{y_j \leftarrow a_1} = \frac{|a_1|}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}} \qquad j = 1,2$$

$$\cancel{K_{y_j \leftarrow a_0} = \frac{|a_0|}{|y_j| \cdot \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}}$$

$$K_{y_j \leftarrow a_0} \frac{|a_0|}{|y_j| \sqrt{a_1^2 - 4a_0}} = \frac{|y_{3-j}|}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}} \qquad j = 1,2$$

Verwendet wurde $y_1 \cdot y_2 = a_0$

Ist $a_0 < 0$:

$$|y_j| < \sqrt{a_1^2 - 4a_0}$$

$$|a_1| < \sqrt{a_1^2 - 4a_0};$$

Zahlenbsp: $a_1 = 5 \quad a_0 = -0.1$

$\Rightarrow y_1 = 5.01992\ldots \quad y_2 = -0.0199206\ldots$

Änderung von 2%: $a_1 = 4.9 \quad a_0 = -0.098$

$\Rightarrow y_1 = 4.91992 \quad y_2 = -0.019919$

Heißt: 2% Δ bei y_1
nur < 0.01% bei y_2.

Alle 4 Konditionszahlen:

$\kappa_{y_j} < 1$ (gut konditioniert)
↳ $\kappa \approx 1$ oder $\kappa < 1$

schlecht konditionierte Probleme

$\kappa \gg 1$

Genauigkeitsforderung für Gesamtfehlereffekt:

$$|\hat{x} - x_{real}| < \tau \qquad \tau\text{: Toleranz}$$

$$|\hat{x} - x_{real}| \leq |\tilde{x} - x| + |x - x_{real}| \leq \varepsilon + \delta < \tau$$

oder (eventuell schärfer):

$$\varepsilon + \underbrace{\kappa |\tilde{D}_+ - D_+|}_{} < \tau$$

$$\kappa |\tilde{D}_+ - D_+| \geq \tau$$

2. Beispiel:

Vorwärts - Rückwärts - Schieben eines Fahrrads

gelenktes Vorderrad: V
ungelenktes Hinterrad: H
Abstand Räder : a

gelenktes Vorderrad wird entlang der x-Achse geführt. y ist der Abstand des ungelenkten Hinterrads H von x-Achse

Der Mittelpunkt des Hinterrads H bewegt sich auf einer Schleppkurve "Tratrix".

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

Bewegung n. rechts (vorwärts): H nähert sich schnell der x-Achse

heißt : Störung wird abgebaut.

Bewegung nach links
(rückwärts)

H entfernt sich weiter und schneller von
x-Achse.

Beispiel: Störung wird verstärkt.

Zahlenbsp.

nach "n" Bewegung	Vorwärts (cm)	Rückwärts (cm)
1	0.37	2.7
2	0.14	7.4
3	0.05	19.7
4	0.02	50.9

Andere Beispiele Pendel