Ein Abstrakt:

Die MAXWELL Gleichungen in ihrer Grundform und ihre Kopplung zur Mechanik

Dr. Wilfried Tenten

Juni 2007

Wenn wir nach Teilchen suchen, so werden Wechselwirkungen erwartet, die im elektromagnetischem Spektrum nachweisbar sind. Damit ist die Fragestellung, welche Ursache diese Wechselwirkung haben kann.

Die Physik beruht auf der Erhaltung des Impulses bzw. der Energie. Der Energiesatz der Elektrodynamik besagt wurde von Poynting mit Hilfe der Maxwell'schen Gleichungen (MWG) hergeleitet.

$$\operatorname{div}\vec{D}=4\pi\rho$$
$$\operatorname{rot}\vec{E}=\frac{-1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\operatorname{div}\vec{B}=0$$
$$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{1}{c}4\pi\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Die MWG lauten:

Die symmetrische Anschrift vernachlässige ich hier zugunsten der **empirisch** gewonnenen Information, **daß es keinen magnetischen Monopol gibt**. Die beiden Rotor Gleichungen werden jeweils mit den Vektoren -H bzw. E multipliziert und anschließend addiert.

D beschreibt die dielektrische Verschiebung. E bezeichnet das elektrische Feld. B beschreibt die Flußdichte. H beschreibt das magnetische Feld. Der Maxwell'sche Konflikt ist hier bereits mit eingearbeitet. Das Kreisintegral der magnetischen Flussdichte längs eines Weges beschreibt den Induktionsstrom aber es ist auch 0. Diesen Konflikt deckte Maxwell auf und „erfand" einen Zusatzterm, den Verschiebungsstrom.

Wir erhalten:

$$\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}-\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,\vec{E}+\frac{1}{c}\left(E\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+H\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

Da die Vektor-Analysis uns mit der Identität der linken Seite als -div (E x H) weiterhilft, so läßt sich das Gleichungssystem umschreiben zu:

$$-\operatorname{div}(\vec{E}\,x\,\vec{H})=\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,\vec{E}+\frac{1}{c}\left(E\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+H\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$
$$\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}(\vec{E}\,x\,\vec{H})+\vec{j}\,\vec{E}=\frac{1}{4\pi}\left(E\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+H\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

Wird diese Gleichung mit -c/(4 π) multipliziert so erhält man die zweite Zeile des linken Systems.

Der rechtsseitige Ausdruck stellt die gesamte Energiedichte pro Zeiteinheit des elektromagnetischen Feldes dar.

$$W_{el}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\vec{D}}\vec{E}\,d\,\vec{D}=\frac{1}{8\pi}\frac{\vec{D}^2}{\epsilon}=\frac{\epsilon}{8\pi}\vec{E}^2=\frac{1}{8\pi}\vec{E}\,\vec{D}$$

Die Energiedichte des elektrischen Feldes erhält man durch das Integral der links angeschriebenen Gleichung.

$$W_{mag}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\vec{B}} \vec{H}\,d\,\vec{B}=\frac{1}{8\pi}\vec{H}\,\vec{B}$$

Die Energiedichte des magnetischen Feldes erhält man durch das Integral der links angeschriebenen Gleichung.

Damit läßt sich dann die Gleichung der Gesamtenergie vereinfachen zu:

$$\frac{-\partial}{\partial t}\left(W_{el}+W_{mag}\right)=\frac{1}{4\pi}\left(E\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+H\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}(\vec{E}\,x\,\vec{H})+\vec{j}\,\vec{E}=\frac{-\partial}{\partial t}\left(W_{el}+W_{mag}\right)$$

Der Term jE beschreibt die die vom Feld an der elektrischen Stromdichte j geleistete Arbeit. Die auf diese Weise in den Strom „hineingesteckte“ Energie findet sich in der pro Zeiteinheit im Volumenelement erzeugten Joul'schen Wärme wieder.

<u>Dieser Term beschreibt die thermische Leistung des Feldes.</u>

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß das Volumenintegral über jE dV schließlich zum bekannten Ausdruck I^2 R führt, mit dem der Leistungseintrag beispielsweise in einen Draht berechnet wird. Wir sehen aber hier, daß die eigentliche Ursache eine Feldwirkung ist.

Der Term $\frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}\,x\,\vec{H}\right)=\vec{S}$ wird auch als Poyntingvektor bezeichnet. Dieser gibt die Stärke der Energieströmung pro Zeiteinheit durch eine zum Strömungsfeld senkrechte Ebene wieder. Nehmen wir es ganz streng, so müssen wir eigentlich das Oberflächenintegral über eine geschlossene Fläche anschreiben, den nur dieses hat eine physikalische Bedeutung.

Damit hat Poynting den Energieerhaltungssatz der Elektrodynamik verfasst:

Der Term des Oberflächenintegrals erklärt den Energiebetrag, der pro Zeiteinheit durch das

$$-\frac{d}{dt}\int_V\left(W_{el}+W_{mag}\right)dV=\int_V\vec{J}\,\vec{E}\,dV+\oint_O\vec{S}\,\vec{n}\,dF$$

Flächenelement dF in Richtung seiner äußeren Normalen mit Vektor n hindurchtritt. Die Größe S/c^2 stellt die durch die elektromagnetische Welle übertragene Impulsdichte dar. Diese äußert sich an materiellen Grenzflächen als Strahlungsdruck.

Der Energieerhaltungssatz von Poynting gibt die Möglichkeit den Impuls des elektromagnetischen Feldes herzuleiten. Die durch das elektrische Feld E pro Volumen und Zeiteinheit verrichtete Arbeit jE bedeutet eine Umwandlung der elektromagnetischen Energie in mechanische Energie bzw. in Wärmeenergie:

$$\int\vec{j}\,\vec{E}\,dV=\frac{d}{dt}E_{mech}$$

<u>E_{mech} ist die gesamte mechanische Energie der Teilchen im Volumen V.</u>

$$\vec{f}=\rho\,\vec{E}=\frac{\vec{j}}{c}\,x\,\vec{B}$$

$$F=\frac{d}{dt}\vec{P}_{mech}=\int\left(\rho\,\vec{E}+\frac{\vec{j}}{c}\,x\,\vec{B}\right)dV$$

Die Wirkung des elektromagnetischen Feldes auf eine Ladung ergibt sich aus der Lorentz Kraftdichte und daraus wird die Kraft durch Volumenintegration hingeschrieben.

<u>Hier wird die Elektrodynamik mit der Mechanik verknüpft!</u>

Durch weitere Berechnungen kann der Strahlungsdruck der elektromagnetischen Welle errechnet werden:

$P_{strahl}=\frac{\vec{K}\,\vec{n}}{\Delta F}=-T_{ij}\,n_i\,n_j$ K stellt die Kraft dar, der rechte Ausdruck beschreibt die i'te

Komponente dieser Kraft auf ein Flächenelement. An einem schwarzen Körper beispielsweise wird die Strahlung an dem Flächenelement dF völlig absorbiert. Die Kraft pro Flächenelement beschreibt den Strahlungsdruck. Sehr schön ist diese Auswirkung bei Kometenschweifen zu sehen, da unterschiedliche Ladungsanteile zu unterschiedlichen Schweifen führen

3