

## Die Grenzggeschwindigkeit eines Körpers im Wasser

Wellen sind Oberflächeneffekte auf dem Wasser, hervorgerufen durch irgendeine Impulseinwirkung wie Wind oder ein Schiff, welches sich auf dem Wasser bewegt.

Bei einer wellenerzeugenden Einwirkung entstehen fast immer mehrere Wellen, die zumeist **verschiedene Länge** haben. Eine solche **Wellengruppe** dehnt sich während ihres Fortschreitens über eine immer größer werdende Strecke in Fortpflanzungsrichtung aus, da die kürzeren Wellen gegenüber den längeren zurückbleiben, die Wellen haben also eine **unterschiedliche Geschwindigkeit**. Durch die unterschiedlichen Geschwindigkeiten der Einzelwellen und durch den ständigen Austausch von Energie zwischen den einzelnen Wellen und den Bereichen vor und hinter der Wellengruppe wird die Wellengruppe immer länger, man muß also die **Gruppengeschwindigkeit** von der **Wellengeschwindigkeit** der einzelnen Wellen unterscheiden. Unter besonderen Bedingungen können auch Einzelwellen entstehen, die eine andere physikalische Ausbildung haben als die "normalen" Meereswellen. Auch die Gezeiten (Tiden) sind nichts anderes als große **Einzelwellen**, die z.B. in etwa in einem Tag einmal um die Erde laufen: die Flut ist der Wellenberg, die Ebbe das Wellental der Tidewelle.

Bereits eine derartige, sehr kurze Beschreibung des Naturereignisses Oberflächenwelle zeigt, daß sehr viele Einzelphänomene

- *das Verhalten einzelner Wellen oder Wellengruppen:* Wellenart, Wellenfrequenz ( $=1/\text{Wellenperiode}$ ), Wellenlänge, Wellengeschwindigkeit
- *das Ausbreitung einzelner Wellen oder Wellengruppen:* Wellengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit, Dispersion
- *die Interaktion mehrerer Wellen oder Wellengruppen:* Reflexion, Interferenz, Brechung, Beugung, Polarisierung

beeinflussen.

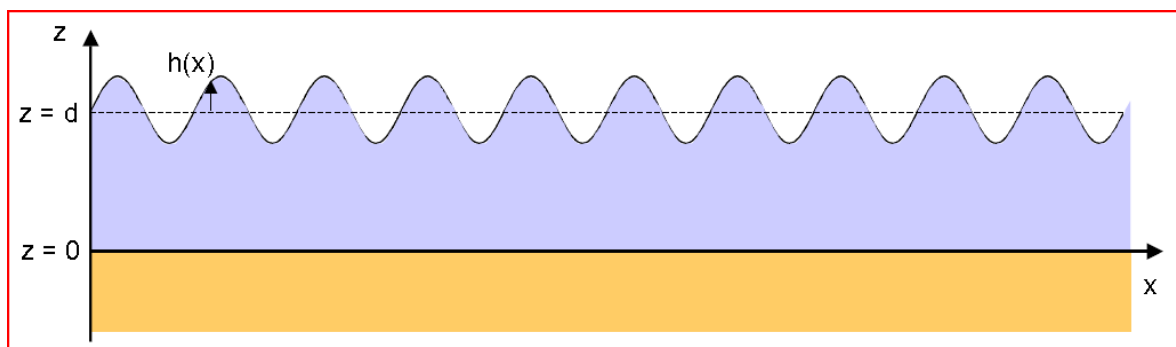
Die vom Wind erzeugten Wasserwellen bilden sich – hauptsächlich – über dem tiefen Wasser. Ihre Form hängt im wesentlichen von der Windgeschwindigkeit, der Winddauer und der Laufstrecke der Wellen seit ihrer Entstehung ab. Der über das Wasser hinweg streichende Wind schiebt aufgrund der Reibung an der Wasseroberfläche einzelne Wasserteilchen an und beschleunigt so die oberflächennahe Wasserschicht. Infolge von Turbulenzen der Luftströmung ist dieser Vorgang jedoch nicht gleichförmig: Sie erzeugen Druckunterschiede zwischen einzelnen Bereichen der Wasseroberfläche, diese senkt und hebt sich, um die Unterschiede auszugleichen. Die Unebenheit der Wasseroberfläche führt dazu, daß der Wind neue – stärkere – Druckunterschiede erzeugt, die wiederum die Ungleichförmigkeit der Wasseroberfläche vergrößern. Auf die Dauer bilden sich so immer höhere, annähernd periodische Wellen.

Prinzipiell könnten die Wellen bei anhaltendem Wind stetig anwachsen. Tatsächlich ist die maximale Höhe einer Welle begrenzt, da bei einer bestimmten Wellenperiode und Wassertiefe die von der Welle bewegten Wasserteilchen an der Oberfläche plötzlich eine höhere Geschwindigkeit haben müssten als die Welle selbst: die Teilchen "überholen" die Wellenkontur. Zu diesem Zeitpunkt bricht die Welle, und die Wellenkämme bilden Schaumkronen, wobei ein Teil der Energie durch Turbulenz aufgezehrt wird. Steigt die Wellenhöhe aufgrund dieses Vorgangs nicht weiter an, und ändert sich auch die Wellenperiode eines Bereiches trotz anhaltenden Windes nicht mehr, wird ein Seegang als "ausgereift" bezeichnet. Die entstehenden Wellen bewegen sich mit einer bestimmten, charakteristischen Geschwindigkeit  $c$  fort, wobei eine Abfolge von Wellen bei ihrer Fortbewegung divergiert - was bedeutet, daß vor und nach ihnen weitere (zunächst kleine) Wellen entstehen. Die Energie der Wellengruppe dehnt sich so über einen größeren Bereich aus, die Wellenhöhe der einzelnen Wellen nimmt ab. Die nahezu konstant bleibende Gesamtenergie bewegt sich mit der sogenannten Gruppengeschwindigkeit  $c_G$  fort. Beim Aussetzen des Windes behalten die Wellen ihre Energie über eine große Lauflänge bei, sie werden dann als Dünung bezeichnet.

Gelangen die Wellen ins flache Wasser, nimmt ihre Länge und Laufgeschwindigkeit ab, oftmals wird auch ihre Richtung verändert; ein Teil der Wellenenergie geht in diesem flachen Bereich durch Bodenreibung verloren. Sinkt die Geschwindigkeit auf einen bestimmten Grenzwert ab, brechen die Wellen ebenfalls und bilden die bekannten, schäumenden Brandungswellen. Auch dieses Brechen führt zu einem turbulenzbedingten Energieverlust.

Schauen wir einmal, wie wir Schwerewellen berechnen können und wie sich daraus die Phasengeschwindigkeit ableitet.

An der Wasseroberfläche wirken Kräfte aufgrund der Gravitation und der Oberflächenspannung. Die Kräfte „versuchen die Oberfläche zu ebenen“. Bei kurzen Wellenlängen überwiegen die Kräfte durch Oberflächenspannung (Kapillarwellen  $\lambda < 1 \text{ cm}$ ), bei großen Wellenlängen überwiegen Kräfte durch den Schweredruck (Schwerewellen). Das Verhalten der beiden Arten von Wellen ist unterschiedlich, wir beschränken uns auf Schwerewellen. Zur Vereinfachung betrachten wir das Wasser als inkompressibel und reibungsfrei. Außerdem seien keine Wirbel vorhanden.



Berechnung des Strömungsfeldes des Wassers unter der welligen Oberfläche:  
Aus der Kontinuitätsgleichung folgt für die inkompressible Flüssigkeit:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

Weil  $r = \text{const}$ , also  $\operatorname{div} u = 0$  ist.

Mathematischer Trick:

Da es keine Wirbel gibt, kann man das Geschwindigkeitsfeld als Gradient eines „Geschwindigkeitspotentials“ schreiben

$$\vec{u} = \operatorname{grad} \varphi$$

Aus der Kontinuitätsgleichung wird damit

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$$

Da Anwendung von Divergenz und Gradient der Anwendung des Laplace-Operators entspricht, folgt:

$$\Delta \varphi = 0$$

Da die  $y$ -Koordinate keine Rolle spielt ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Nun müssen noch die Randbedingungen aufgestellt werden:

Randbedingungen: Am Bodendes Gefäßes ( $z=0$ ) muss die senkrechte Komponente der Geschwindigkeit gleich Null sein.

$$u_z = 0$$

Für das Geschwindigkeitspotential mit Randbedingung unten heißt das:

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0 \quad \text{bei } z = 0$$

An Oberfläche, d.h. genauer gesagt an der Position  $z=d$  herrscht durch die Wellenhöhe ein Schweredruck von

$$p = \rho g h$$

Hierzu verwenden wir die Eulergleichung

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}}_{\substack{\text{klein weil} \\ u \text{ klein ist}}} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

Damit ergibt sich für kleine Geschwindigkeiten (linearisierte Gleichung)

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

Für das Geschwindigkeitspotential folgt

$$\text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} p$$

Einsetzen von  $p = \rho g h$  liefert die Randbedingung bei  $z=d$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -g h$$

Einmal ableiten nach der Zeit ergibt die obere Randbedingung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial h}{\partial t} = -g u_z = -g \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Die Lösung der Differentialgleichung mit der unteren Randbedingungen lautet

$$\varphi(x, z, t) = A \cosh kz \cos(kx - \omega t)$$

Überprüfen der Lösung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -kA \cosh kz \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -k^2 A \cosh kz \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = kA \sinh kz \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = k^2 A \cosh kz \cos(kx - \omega t)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$(-k^2 + k^2) A \cosh kz \cos(kx - \omega t) = 0$$

Stimmt!

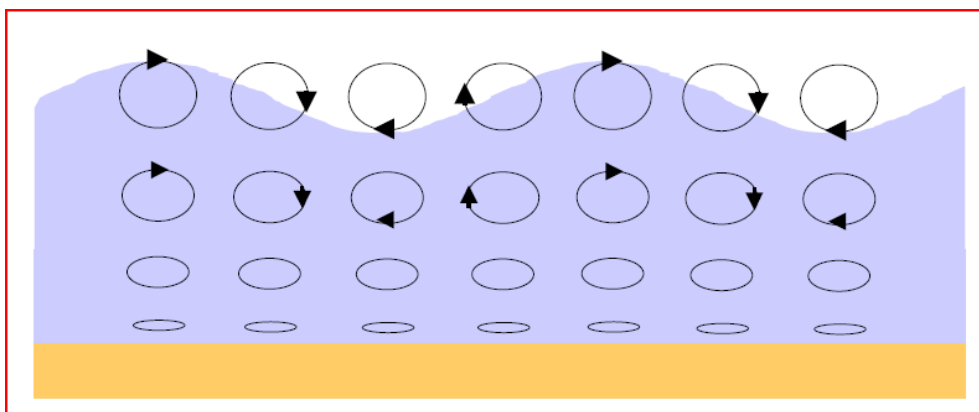
Aus dem Geschwindigkeitspotential

$$\varphi(x, z, t) = A \cosh kz \cos(kx - \omega t)$$

Berechnung und Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -kA \cosh kz \sin(kx - \omega t)$$

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = kA \sinh kz \cos(kx - \omega t)$$



Die untere Randbedingung bei  $z=0$  ist erfüllt weil:

$$u_z = kA \sinh kz \cos(kx - \omega t) = 0$$

Einsetzen der Lösung in die obere Randbedingung ergibt den Zusammenhang zwischen  $\omega$  von  $k$  und damit die Phasengeschwindigkeit der Welle:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega A \cosh kz \sin(kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cosh kz \cos(kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = kA \sinh kz \cos(kx - \omega t)$$

Einsetzen in die obere Randbedingung ergibt:

$$-\omega^2 A \cosh kz \cos(kx - \omega t) = -gkA \sinh kz \cos(kx - \omega t)$$

Durch Auflösen nach  $\omega$  erhält man den Zusammenhang zwischen  $\omega$  von  $k$  für  $z=d$ :

$$\omega^2 = gk \tanh kz$$

Heißt:

$$\omega(k) = \sqrt{gk \tanh kd}$$

Für große Wassertiefen  $d \gg \lambda$  also  $kd \gg 1$  ist  $\tanh kd \approx 1$

$$\omega(k) \cong \sqrt{gk}$$

Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist demzufolge:

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

Setzen wir in die letzte Gleichung für  $\lambda$  die Wasserlinienlänge eines Schiffes ein, so berechnet sich damit die Grenzgeschwindigkeit oder Rumpfgeschwindigkeit eines Schiffes in m/sec. Durch explizites Ausrechnen der Konstanten und Umrechnen von m/sec in kn bzw. km/h ergibt sich die jedem Skipper bekannte Formel für die Rumpfgeschwindigkeit:

$$v = 4.498 \cdot \sqrt{LWL} \quad \left[ \frac{km}{h} \right]$$

$$v = 2.424 \cdot \sqrt{LWL} \quad [kn]$$

Sie hängt nur von der Wellenlänge sowie der Schwerkraft ab. Dies bezeichnet man als Dispersion.

Wirft man einen Stein ins Wasser bildet sich eine Welle mit begrenzter Länge, ein Wellenpaket! Nur unendlich lange Wellen bestehen aus einer einzigen Wellenlänge. Wellenpakete bestehen aus vielen dicht beieinander liegenden Wellenlängen. Die verschiedenen Anteile laufen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten, dieses begründet durch die Dispersion.

Das Wellenpaket wird daher länger und länger, d.h. es läuft auseinander. Dieser Effekt tritt an vielen Stellen in der Physik auf: z.B. Lichtblitz beim Durchgang durch Glas, Elektronenwelle, etc. Bei Wasserwellen sind die langen Wellenlängen am schnellsten und überholen die Wellen mit kürzeren Wellenlängen. Die ganz kurzen Wellenlängen sind Kapillarwellen und sind aus anderen Gründen schneller.

## Nichtlineare Effekte:

Dispersion ist ein Effekt der auch bei linearen Differentialgleichungen auftritt. Bei großen Wellen im seichten Wasser kann die Euler-Gleichung nicht mehr linearisiert werden.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}}_{\text{vergleichbar groß}} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

Es treten nichtlineare Effekte auf. Dadurch können Solitonen entstehen. Bei Wellen in nichtlinearen Medien ist die Geschwindigkeit nicht nur von der Wellenlänge sondern auch von der Amplitude abhängig.

Dispersion und Amplitudenabhängigkeit können sich gegenseitig aufheben.

Es bildet sich ein einziger Wellenberg mit bestimmter Form, der aber nicht wie ein Wellenpaket auseinander läuft: ein **SOLITON**.

---

Ein **Soliton** ist ein [Wellenpaket](#), welches sich durch ein [dispersives](#) und zugleich [nichtlineares Medium](#) bewegt und sich ohne Änderung seiner Form ausbreitet. Kommt es bei einem Zusammenstoß mit gleichartigen Wellenpaketen zu einer [Wechselwirkung](#), bei der [Energie](#) ausgetauscht wird, so handelt es sich hierbei um eine [solitäre Welle](#). Tritt kein Energieaustausch ein, so handelt es sich um ein Soliton.

**Dispersion** die Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen von ihrer Wellenlänge

Literatur:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Dispersion>

[http://de.wikipedia.org/wiki/Dispersion %28Wasserwellen%29](http://de.wikipedia.org/wiki/Dispersion_%28Wasserwellen%29)

<http://de.wikipedia.org/wiki/Soliton>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Korteweg-de-Vries-Gleichung>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Schr%C3%B6dinger-Gleichung>