Dr. Wilfried Tenten Gammertingen Juli 13.2007

Für das Forum

```
> restart:
```

Hamiltontheorie mit einer generalisierten Koordinate q(t)

Die auf dem Prinzip der kleinsten Wirkung gründendenHamilton Theorie vereinfachen die Modelbildung innerhalb der theoretischen Physik sehr. Beschreibt man das System durch voneinander unabhängige generalisierte Koordinaten (in diesem Fall eine generalisierte Koordinate q) und generalisierte Impulse p, so ergeben sich die Bewegungsgleichungen des betrachteten Systems durch die Hamiltongleichungen. Man muß dabei lediglich die Hamiltonfunktion des Systems kennen; diese ergibt sich durch die kinetische plus die potentielle Energie (T+V).

Analytische Lösung

Hier behandeln wir die Lagrangetheorie des harmonischen Oszillators. Die durch die Lagrangegleichungen gebildete Differenzialgleichung (Bewegungsgleichung) läßt sich analytisch lösen.

```
> T:=1/2*m*qt^2;
  V:=1/2*k*q^2;
  L:=T-V;
  Ham:=T+V;
```

$$T := \frac{m\,qt^2}{2}$$

$$V := \frac{k\,q^2}{2}$$

$$L := \frac{m\,qt^2}{2} - \frac{k\,q^2}{2}$$

$$Ham := \frac{m\,qt^2}{2} + \frac{k\,q^2}{2}$$

```
> p_q:=diff(L,qt);
  H:=subs({qt=solve(p_q=p,qt)},Ham);
```

$$p\_q := m\,qt$$

$$H := \frac{p^2}{2\,m} + \frac{k\,q^2}{2}$$

```
> Hamilton_a:=diff(p(t),t)=-subs({q=q(t),p=p(t)},diff(H,q));

  Hamilton_b:=diff(q(t),t)=subs({q=q(t),p=p(t)},diff(H,p));
```

$$Hamilton\_a := \frac{d}{dt}\,\mathrm{p}(t) = -k\,\mathrm{q}(t)$$

$$Hamilton\_b := \frac{d}{dt}\,\mathrm{q}(t) = \frac{\mathrm{p}(t)}{m}$$

```
> LagrangeGL:=diff(subs({q=q(t),qt=diff(q(t),t)},diff(L,qt))
  ,t)-subs({q=q(t),qt=diff(q(t),t)},diff(L,q));
```

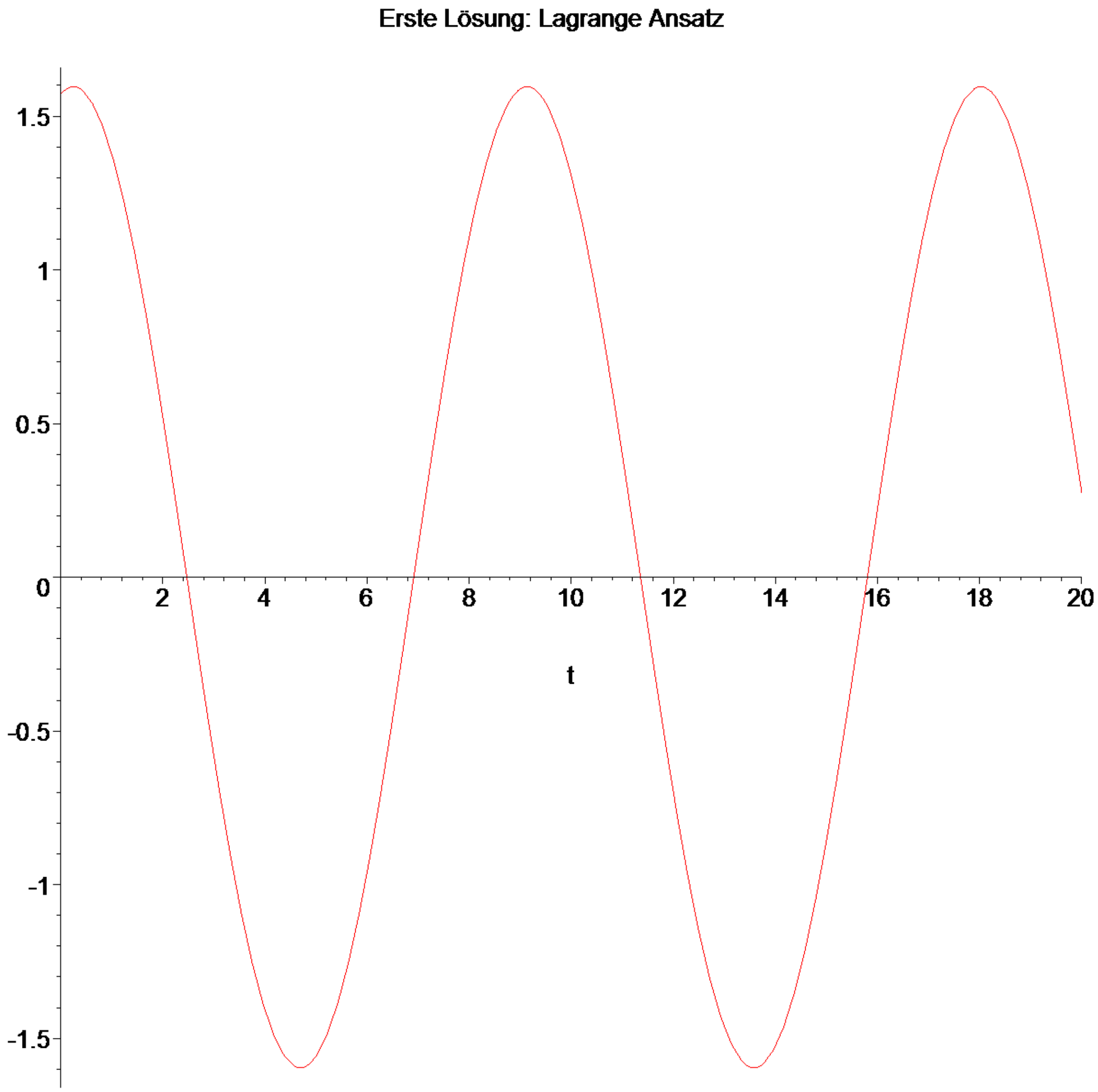
$$LagrangeGL := m\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{q}(t)\right) + k\,\mathrm{q}(t)$$

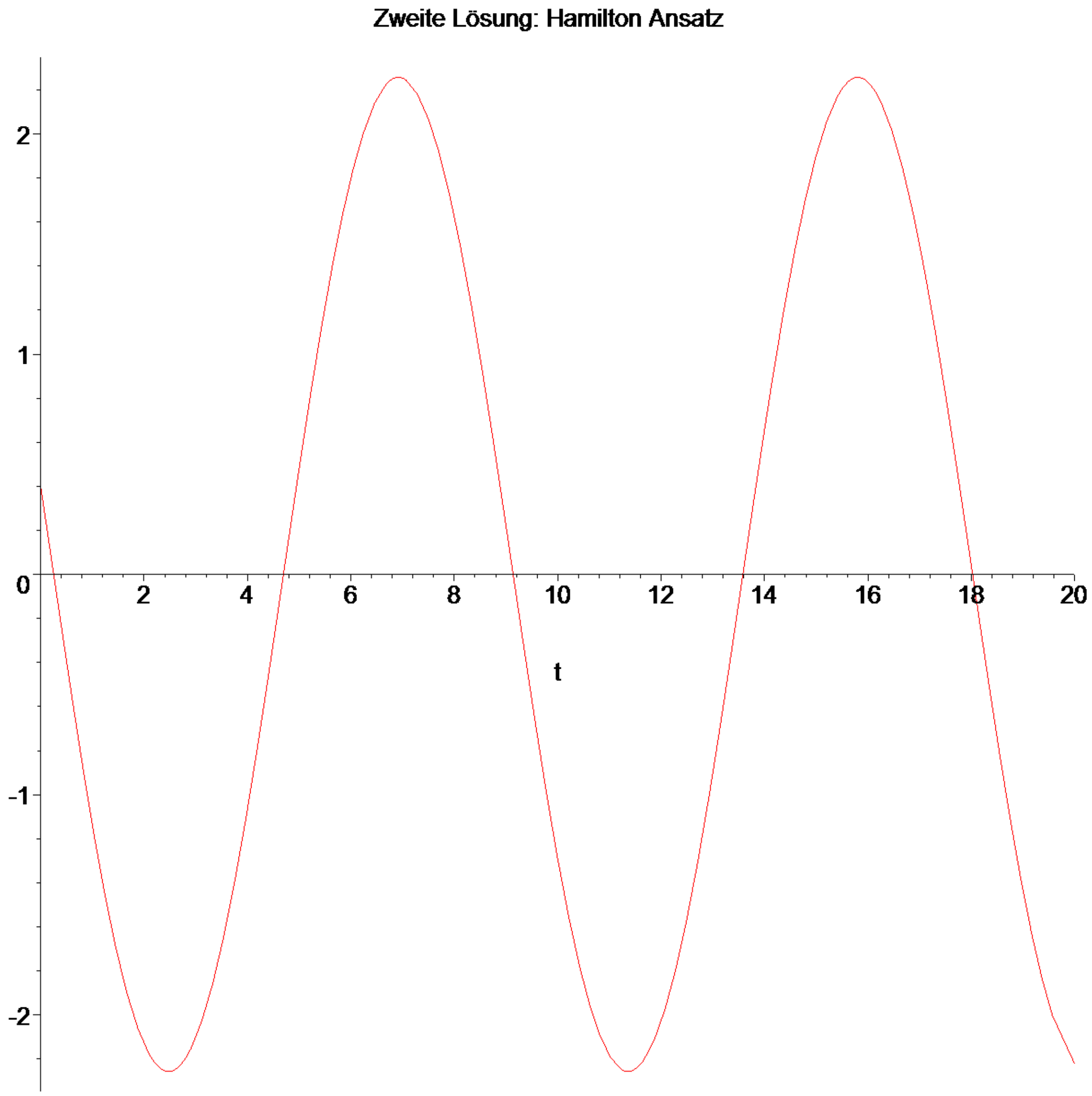
```
> Aq:=Pi/2:
  Aqt:=0.2:

  Loes:=dsolve({LagrangeGL,q(0)=Aq,D(q)(0)=Aqt},q(t));
  Loes1:=dsolve({Hamilton_a,Hamilton_b,q(0)=Aq,D(q)(0)=Aqt},
  {q(t),p(t)});
```

$$Loes := \mathrm{q}(t) = \frac{1}{5}\,\frac{\sqrt{m}\,\sin\left(\frac{\sqrt{k}\,t}{\sqrt{m}}\right)}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2}\,\pi\cos\left(\frac{\sqrt{k}\,t}{\sqrt{m}}\right)$$

$$Loes1 := \left\{\mathrm{p}(t) = \sqrt{k}\left(\frac{1}{5}\,\frac{\sqrt{m}\,\cos\left(\frac{\sqrt{k}\,t}{\sqrt{m}}\right)}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2}\,\pi\sin\left(\frac{\sqrt{k}\,t}{\sqrt{m}}\right)\right)\sqrt{m},\right.$$
$$\left.\mathrm{q}(t) = \frac{1}{5}\,\frac{\sqrt{m}\,\sin\left(\frac{\sqrt{k}\,t}{\sqrt{m}}\right)}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2}\,\pi\cos\left(\frac{\sqrt{k}\,t}{\sqrt{m}}\right)\right\}$$

```
> plot(subs({k=1,m=2},rhs(Loes)),t=0..20,title="Erste
  Lösung: Lagrange Ansatz");
  plot(subs({k=1,m=2},rhs(Loes1[1])),t=0..20,title="Zweite
  Lösung: Hamilton Ansatz");
```


Erste Lösung: Lagrange Ansatz
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
t




```
> restart:
```

Numerische Lösung des Pendels

Hier behandeln wir die Hamiltontheorie des Pendels. Die generalisierte Koordinate q ist der Winkel der Auslenkung des Pendels. Die enstehende Bewegungsgleichung läßt sich (ohne weitere Approximationen) nur numerisch lösen.

```
> g:=9.81:
  m:=1:
  l:=1:

  T:=1/2*m*l^2*qt^2;
  V:=m*g*l*(1-cos(q));
  L:=T-V;
  Ham:=T+V;
```

$$T := \frac{qt^2}{2}$$

$$V := 9.81 - 9.81\cos(q)$$

$$L := \frac{qt^2}{2} - 9.81 + 9.81\cos(q)$$

$$Ham := \frac{qt^2}{2} + 9.81 - 9.81\cos(q)$$

```
> p_q:=diff(L,qt);
  H:=subs({qt=solve(p_q=p,qt)},Ham);
```

$$p\_q := qt$$

$$H := \frac{p^2}{2} + 9.81 - 9.81\cos(q)$$

```
> Hamilton_a:=diff(p(t),t)=-subs({q=q(t),p=p(t)},diff(H,q));

  Hamilton_b:=diff(q(t),t)=
  subs({q=q(t),p=p(t)},diff(H,p));
```

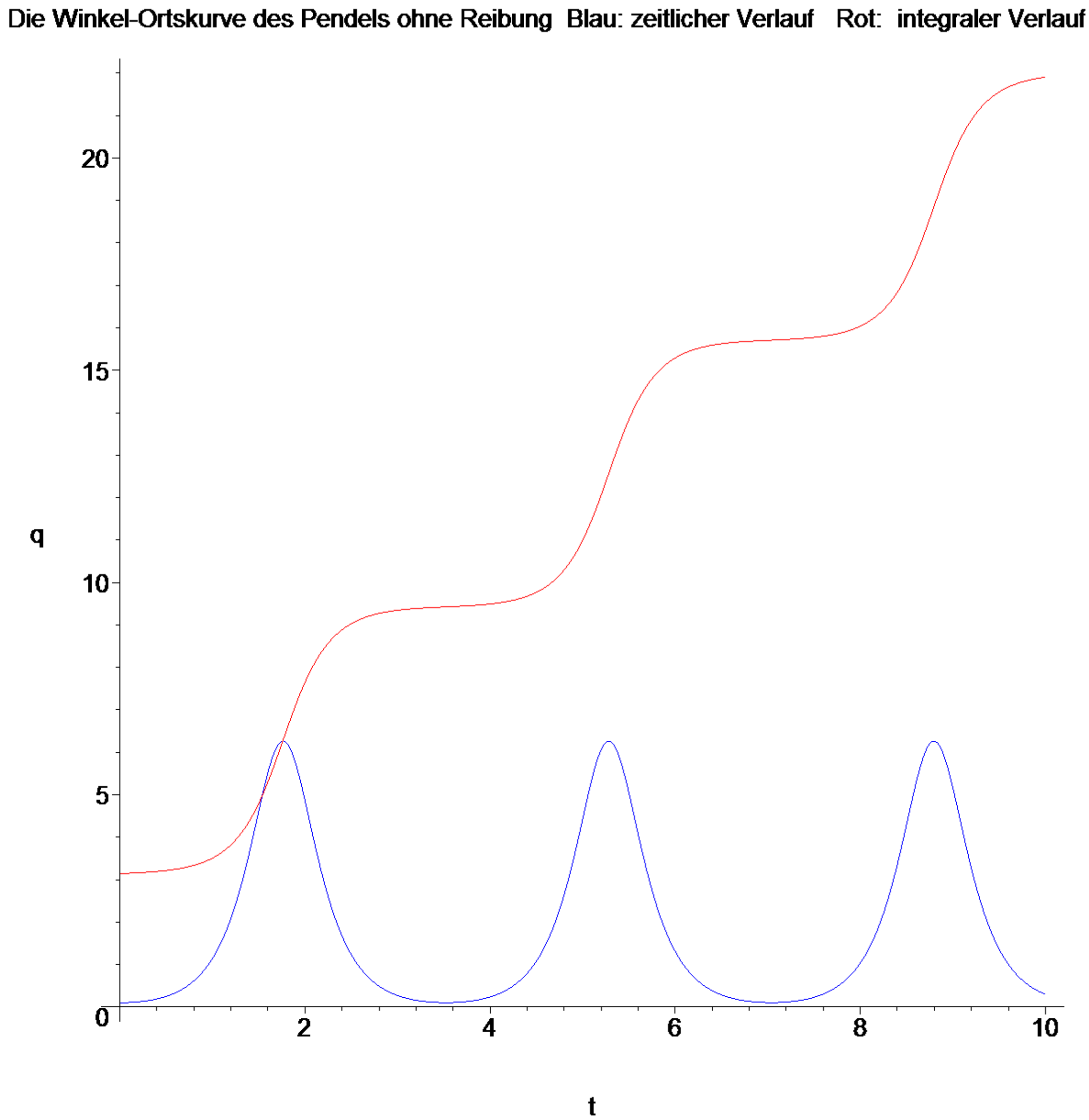
$$Hamilton\_a := \frac{d}{dt}\,\mathrm{p}(t) = -9.81\sin(\mathrm{q}(t))$$

$$Hamilton\_b := \frac{d}{dt}\,\mathrm{q}(t) = \mathrm{p}(t)$$

```
>
> Aq:=Pi:
  Ap:=0.1:

  Loes:=dsolve({Hamilton_a,Hamilton_b,q(0)=Aq,p(0)=Ap},{q(t)
  ,p(t)},type=numeric,output=listprocedure);
```

Loes := [*t* = (**proc**(*t*) ... **end proc**), p(*t*) = (**proc**(*t*) ... **end proc**),
q(*t*) = (**proc**(*t*) ... **end proc**)]

```
> with(plots):
  with(plottools):
> tend:=10:
  G1:=odeplot(Loes,[t,q(t)],0..tend,numpoints=500,color=red)
  :
  G2:=odeplot(Loes,[t,p(t)],0..tend,numpoints=500,color=blue
  ,title="Die Winkel-Ortskurve des Pendels ohne Reibung
  Blau: zeitlicher Verlauf   Rot:  integraler Verlauf"):
  display(G1,G2);
```




```
> N:=100:
phi:=eval(q(t),Loes);
pq:=eval(p(t),Loes);
PD2:=listplot([seq([phi(n/N),pq(n/N)],n=0..tend*N)],color=
blue):
pmax:=max(seq(pq(n/N),n=0..tend*N));
phimax:=max(seq(phi(n/N),n=0..tend*N));
pmin:=min(seq(pq(n/N),n=0..tend*N));
phimin:=min(seq(phi(n/N),n=0..tend*N));
```

$$\phi := \textbf{proc}(t)\ \ldots\ \textbf{end proc}$$

$$pq := \textbf{proc}(t)\ \ldots\ \textbf{end proc}$$

$$pmax := 6.26483376114611534$$

$$phimax := 21.9022104801908988$$

$$pmin := 0.10000000000000$$

$$phimin := 3.1415926535898$$

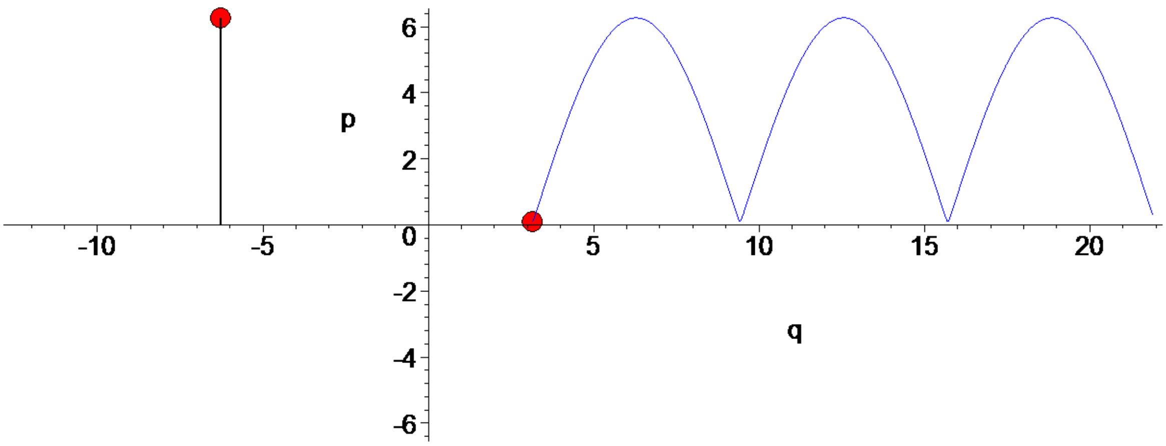
```
> x:=t->pmax*sin(phi(t))-2*phimin;
  y:=t->-pmax*cos(phi(t));
```

$$x := t \rightarrow pmax\,\sin(\phi(t)) - 2\,phimin$$

$$y := t \rightarrow -pmax\,\cos(\phi(t))$$

```
> frames:=100:
  for i from 0 by 1 to frames do

  Masse_pd[i]:=display(disk([phi(i*tend/frames),pq(i*tend/frames)],0.3,color=red)):
  Ani_pd[i]:=display({Masse_pd[i],PD2});

  Seil[i]:=curve([[-2*phimin,0],[x(i*tend/frames),y(i*tend/frames)]],thickness=2,color=black):
  Masse[i]:=display(disk([x(i*tend/frames),y(i*tend/frames)],0.3,color=red)):
  Ani[i]:=display({Masse[i],Seil[i]});
  od:
> Plot1:=display([seq(Ani_pd[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained):
  Plot2:=display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained):
  display({Plot2,Plot1},scaling=constrained,labels=[q,p],title="Kurve des Pendels unter Einfluss der Schwerkraft");
```

Kurve des Pendels unter Einfluss der Schwerkraft



>

Numerische Lösung des Pendels mit Reibung

```
> g:=9.81:
  m:=1:
  l:=1:
  beta:=0.1;

  T:=1/2*m*l^2*qt^2;
  V:=m*g*l*(1-cos(q));
  L:=T-V;
  DR:=1/2*beta*qt^2;
```

$$\beta := 0.1$$

$$T := \frac{qt^2}{2}$$

$$V := 9.81 - 9.81\cos(q)$$

$$L := \frac{qt^2}{2} - 9.81 + 9.81\cos(q)$$

$$DR := 0.05000000000\,qt^2$$

```
> LagrangeGL:=diff(subs({q=q(t),qt=diff(q(t),t)},diff(L,qt))
  ,t)-subs({q=q(t),qt=diff(q(t),t)},diff(L,q))+subs({q=q(t),
  qt=diff(q(t),t)},diff(DR,qt))=0;
```

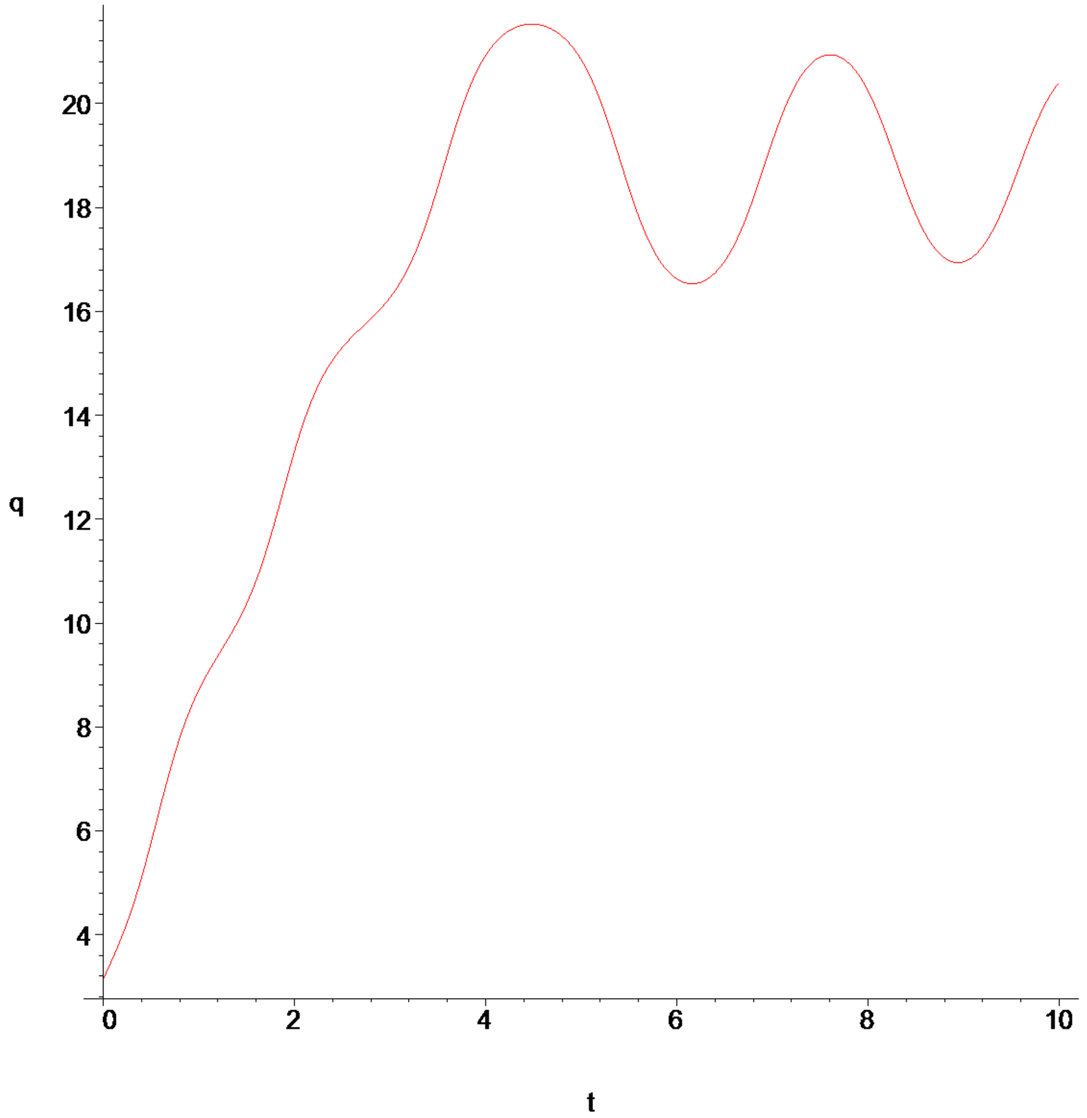
$$LagrangeGL := \left(\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{q}(t)\right) + 9.81\sin(\mathrm{q}(t)) + 0.1000000000\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q}(t)\right) = 0$$

```
> Aq:=Pi:
  Aqt:=4:

  Loes:=dsolve({LagrangeGL,q(0)=Aq,D(q)(0)=Aqt},q(t),type=nu
  meric,output=listprocedure);
```

$$Loes := \left[t = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}),\ \mathrm{q}(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}),\ \frac{d}{dt}\,\mathrm{q}(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc})\right]$$

```
> with(plots):
  with(plottools):
> odeplot(Loes,[t,q(t)],0..10,numpoints=500,title="Die
  Winkel-Ortskurve des Pendels mit Reibung integraler
  Verlauf .. es gibt wohl einen endlichen Grenzwert!");
```

Die Winkel-Ortskurve des Pendels mit Reibung integraler Verlauf .. es gibt wohl einen endlichen Gre




```
> phi:=eval(q(t),Loes);
```

$$\phi := \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}$$

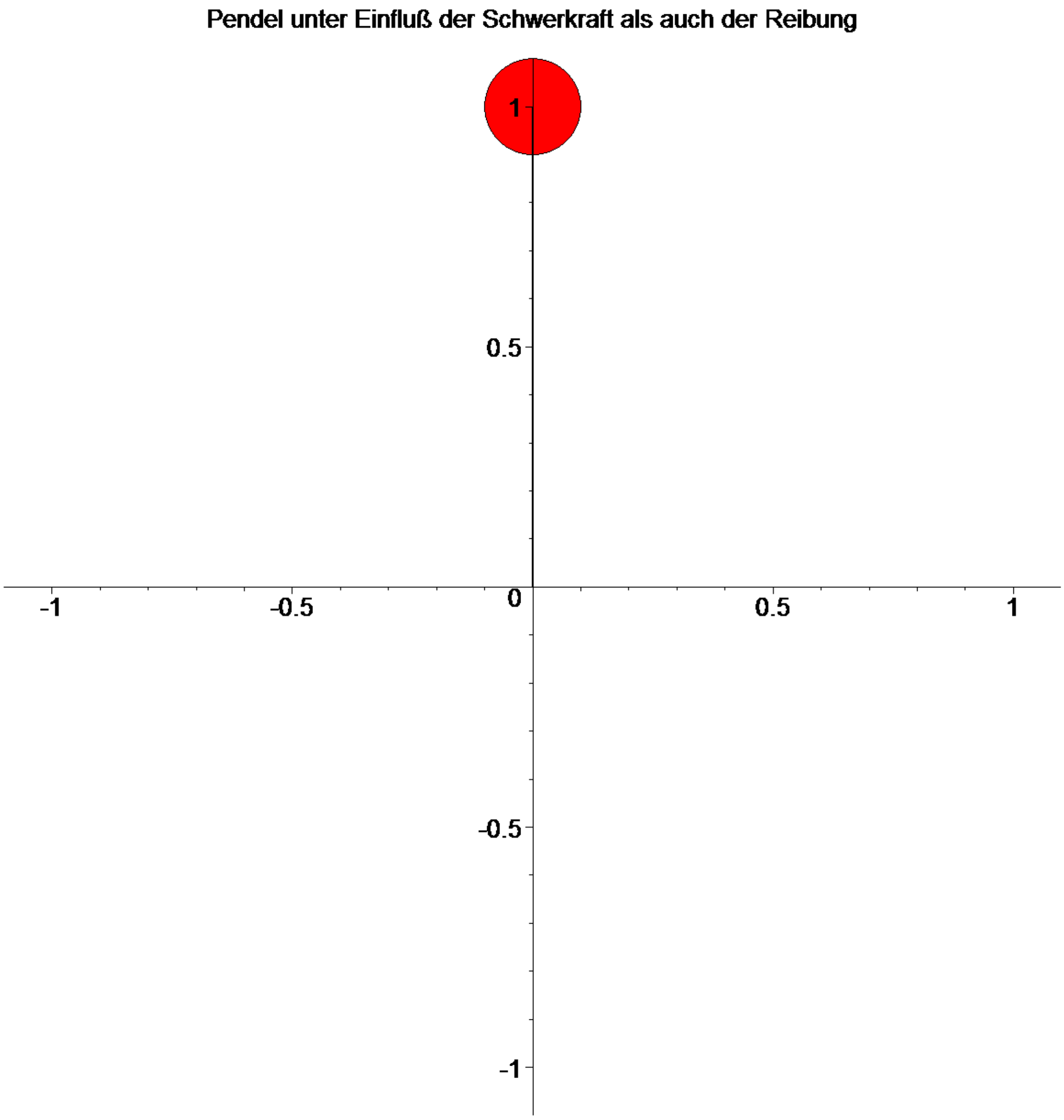
```
> x:=t->l*sin(phi(t));
  y:=t->-l*cos(phi(t));
```

$$x := t \rightarrow l \sin(\phi(t))$$

$$y := t \rightarrow -l \cos(\phi(t))$$

```
>
  tend:=10:
  frames:=100:
  for i from 0 by 1 to frames do
  Seil[i]:=curve([[0,0],[x(i*tend/frames),y(i*tend/frames)]]
  ,thickness=2,color=black):
  Masse[i]:=display(disk([x(i*tend/frames),y(i*tend/frames)]
  ,0.1,color=red)):
  Ani[i]:=display({Masse[i],Seil[i]});
```

```
od:
> display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=
constrained,title="Pendel unter Einfluß der Schwerkraft
als auch der Reibung");
```



Hamiltontheorie mit zwei generalisierten Koordinaten q1(t), q2(t)

```
>
```

Wir wollen nun ein System betrachten, daß durch zwei voneinander unabhängige Koordinaten q1 und q2 beschrieben werden kann. Die Lagrangefunktion L ist dann im allgemeinen von diesen Koordinaten und ihren zeitlichen Ableitungen abhängig. Es ergeben sich zwei Lagrangegleichungen, die im allgemeinen ein System von gekoppelten Differentialgleichungen darstellen.

Das Doppelpendel in Lagrange und Hamiltontheorie

Das Doppelpendel wird durch die beiden Winkel beschrieben, die unsere generalisierten

Koordinaten q1 und q2 darstellen. Man erhält zwei Lagrangegleichungen, die die Bewegungsgleichungen des Systems darstellen. Die Lösung dieses Systems von Differentialgleichung wird dann, nach Angabe der vier Anfangswerte mit dem Befehl dsolve() gelösst.

```
> g:=9.81:
m1:=1:
l1:=2:
m2:=1:
l2:=1:
```

```
> T:=1/2*m1*l1^2*q1t^2 + 1/2*m2*(l1^2*q1t^2 + l2^2*q2t^2 +
l1*l2*q1t*q2t*cos(q1-q2));
V:=m1*g*(l1+l2-l1*cos(q1)) + m2*g*(l1+l2-(l1*cos(q1) +
l2*cos(q2)));
L:=T-V;
Ham:=T+V;
```

$$T := 4\, q1t^2 + \frac{q2t^2}{2} + q1t\, q2t \cos(-q1 + q2)$$

$$V := 58.86 - 39.24 \cos(q1) - 9.81 \cos(q2)$$

$$L := 4\, q1t^2 + \frac{q2t^2}{2} + q1t\, q2t \cos(-q1 + q2) - 58.86 + 39.24 \cos(q1) + 9.81 \cos(q2)$$

$$Ham := 4\, q1t^2 + \frac{q2t^2}{2} + q1t\, q2t \cos(-q1 + q2) + 58.86 - 39.24 \cos(q1) - 9.81 \cos(q2)$$

```
> p_q1a:=diff(L,q1t);
p_q2a:=diff(L,q2t);
p_q1:=subs({q2t=solve(p_q2a=p2,q2t)},p_q1a);
p_q2:=subs({q1t=solve(p_q1a=p1,q1t)},p_q2a);

H:=subs({q1t=solve(p_q1=p1,q1t),q2t=solve(p_q2=p2,q2t)},Ha
m);
```

$$p\_q1a := 8\, q1t + q2t \cos(-q1 + q2)$$

$$p\_q2a := q2t + q1t \cos(-q1 + q2)$$

$$p\_q1 := 8\, q1t + (-q1t \cos(-q1 + q2) + p2) \cos(-q1 + q2)$$

$$p\_q2 := q2t + \left(-\frac{1}{8}\, q2t \cos(-q1 + q2) + \frac{p1}{8}\right) \cos(-q1 + q2)$$

$$H := \frac{4\,(\cos(-q1 + q2)\, p2 - p1)^2}{\left(-8 + \cos(-q1 + q2)^2\right)^2} + \frac{1}{2}\, \frac{(-\cos(-q1 + q2)\, p1 + 8\, p2)^2}{\left(-8 + \cos(-q1 + q2)^2\right)^2}$$

$$-\frac{(\cos(-q1+q2)\,p2-p1)\,(-\cos(-q1+q2)\,p1+8\,p2)\,\cos(-q1+q2)}{(-8+\cos(-q1+q2)^2)^2}+58.86$$
$$-39.24\cos(q1)-9.81\cos(q2)$$

```
> EulerLagr1:=diff(subs({q1=q1(t),q1t=diff(q1(t),t),q2=q2(t)
,q2t=diff(q2(t),t)},diff(L,q1t)),t) -
subs({q1=q1(t),q1t=diff(q1(t),t),q2=q2(t),q2t=diff(q2(t),t
)},diff(L,q1))=0;
EulerLagr2:=diff(subs({q1=q1(t),q1t=diff(q1(t),t),q2=q2(t)
,q2t=diff(q2(t),t)},diff(L,q2t)),t) -
subs({q1=q1(t),q1t=diff(q1(t),t),q2=q2(t),q2t=diff(q2(t),t
)},diff(L,q2))=0;
```

$$EulerLagr1 := 8\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{q1}(t)\right)+\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{q2}(t)\right)\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))$$
$$-\left(\frac{d}{dt}\mathrm{q2}(t)\right)\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\left(-\left(\frac{d}{dt}\mathrm{q1}(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}\mathrm{q2}(t)\right)\right)$$
$$-\left(\frac{d}{dt}\mathrm{q1}(t)\right)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{q2}(t)\right)\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))+39.24\sin(\mathrm{q1}(t))=0$$
$$EulerLagr2 := \left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{q2}(t)\right)+\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{q1}(t)\right)\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))$$
$$-\left(\frac{d}{dt}\mathrm{q1}(t)\right)\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\left(-\left(\frac{d}{dt}\mathrm{q1}(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}\mathrm{q2}(t)\right)\right)$$
$$+\left(\frac{d}{dt}\mathrm{q1}(t)\right)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{q2}(t)\right)\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))+9.81\sin(\mathrm{q2}(t))=0$$

```
> Hamilton1_a:=diff(p1(t),t)=-subs({q1=q1(t),p1=p1(t),q2=q2(
t),p2=p2(t)},diff(H,q1));
Hamilton1_b:=diff(q1(t),t)=subs({q1=q1(t),p1=p1(t),q2=q2(t
),p2=p2(t)},diff(H,p1));
Hamilton2_a:=diff(p2(t),t)=-subs({q1=q1(t),p1=p1(t),q2=q2(
t),p2=p2(t)},diff(H,q2));
Hamilton2_b:=diff(q2(t),t)=subs({q1=q1(t),p1=p1(t),q2=q2(t
),p2=p2(t)},diff(H,p2));
```

$$Hamilton1\_a := \frac{d}{dt}\mathrm{p1}(t)=$$
$$-\frac{8\,(\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p2}(t)-\mathrm{p1}(t))\,\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p2}(t)}{(-8+\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2)^2}$$
$$+\frac{16\,(\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p2}(t)-\mathrm{p1}(t))^2\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))}{(-8+\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2)^3}$$

$$
+\frac{(-\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p1}(t)+8\,\mathrm{p2}(t))\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p1}(t)}{(-8+\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2)^2}+
$$

$$
\frac{2\,(-\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p1}(t)+8\,\mathrm{p2}(t))^2\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))}{(-8+\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2)^3}
$$

$$
+\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p2}(t)\,(-\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p1}(t)+8\,\mathrm{p2}(t))
$$

$$
\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,/\,(-8+\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2)^2-4
$$

$$
(\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p2}(t)-\mathrm{p1}(t))\,(-\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p1}(t)+8\,\mathrm{p2}(t))
$$

$$
\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\Big/(-8+\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2)^3-
$$

$$
\frac{(\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p2}(t)-\mathrm{p1}(t))\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p1}(t)\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))}{(-8+\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2)^2}
$$

$$
+(\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p2}(t)-\mathrm{p1}(t))\,(-\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p1}(t)+8\,\mathrm{p2}(t))
$$

$$
\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,/\,(-8+\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2)^2-39.24\sin(\mathrm{q1}(t))
$$

$$
\mathit{Hamilton1\_b}:=\frac{d}{dt}\,\mathrm{q1}(t)=-\frac{8\,(\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p2}(t)-\mathrm{p1}(t))}{(-8+\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2)^2}
$$

$$
+\frac{(\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p2}(t)-\mathrm{p1}(t))\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2}{(-8+\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2)^2}
$$

$$
\mathit{Hamilton2\_a}:=\frac{d}{dt}\,\mathrm{p2}(t)=
$$

$$
\frac{8\,(\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p2}(t)-\mathrm{p1}(t))\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p2}(t)}{(-8+\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2)^2}
$$

$$
-\frac{16\,(\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p2}(t)-\mathrm{p1}(t))^2\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))}{(-8+\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2)^3}
$$

$$
-\frac{(-\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p1}(t)+8\,\mathrm{p2}(t))\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p1}(t)}{(-8+\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2)^2}-
$$

$$
\frac{2\,(-\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p1}(t)+8\,\mathrm{p2}(t))^2\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))}{(-8+\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2)^3}
$$

$$
-\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p2}(t)\,(-\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p1}(t)+8\,\mathrm{p2}(t))
$$

$$
\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,/\,(-8+\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2)^2+4
$$

$$
(\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p2}(t)-\mathrm{p1}(t))\,(-\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p1}(t)+8\,\mathrm{p2}(t))
$$

$$
\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\Big/(-8+\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2)^3+
$$

$$
\frac{(\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p2}(t)-\mathrm{p1}(t))\sin(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p1}(t)\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))}{(-8+\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))^2)^2}
$$

$$
-(\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p2}(t)-\mathrm{p1}(t))\,(-\cos(-\mathrm{q1}(t)+\mathrm{q2}(t))\,\mathrm{p1}(t)+8\,\mathrm{p2}(t))
$$

$$\sin(-q1(t)+q2(t)) \,/\, \left(-8+\cos(-q1(t)+q2(t))^2\right)^2 - 9.81 \sin(q2(t))$$

$$Hamilton2\_b := \frac{d}{dt}\, q2(t) = \frac{8\,(-\cos(-q1(t)+q2(t))\, p1(t) + 8\, p2(t))}{\left(-8+\cos(-q1(t)+q2(t))^2\right)^2} - \frac{\cos(-q1(t)+q2(t))^2\,(-\cos(-q1(t)+q2(t))\, p1(t) + 8\, p2(t))}{\left(-8+\cos(-q1(t)+q2(t))^2\right)^2}$$

```
> Aq1:=Pi:
  Ap1:=0:
  Aq2:=Pi/2:
  Ap2:=0:
  A_v1:=0:
  A_v2:=0:

  Loes_Ham:=dsolve({Hamilton1_a,Hamilton1_b,Hamilton2_a,Hamilton2_b,q1(0)=Aq1,p1(0)=Ap1,q2(0)=Aq2,p2(0)=Ap2},{q1(t),p1(t),q2(t),p2(t)},type=numeric,output=listprocedure);
```

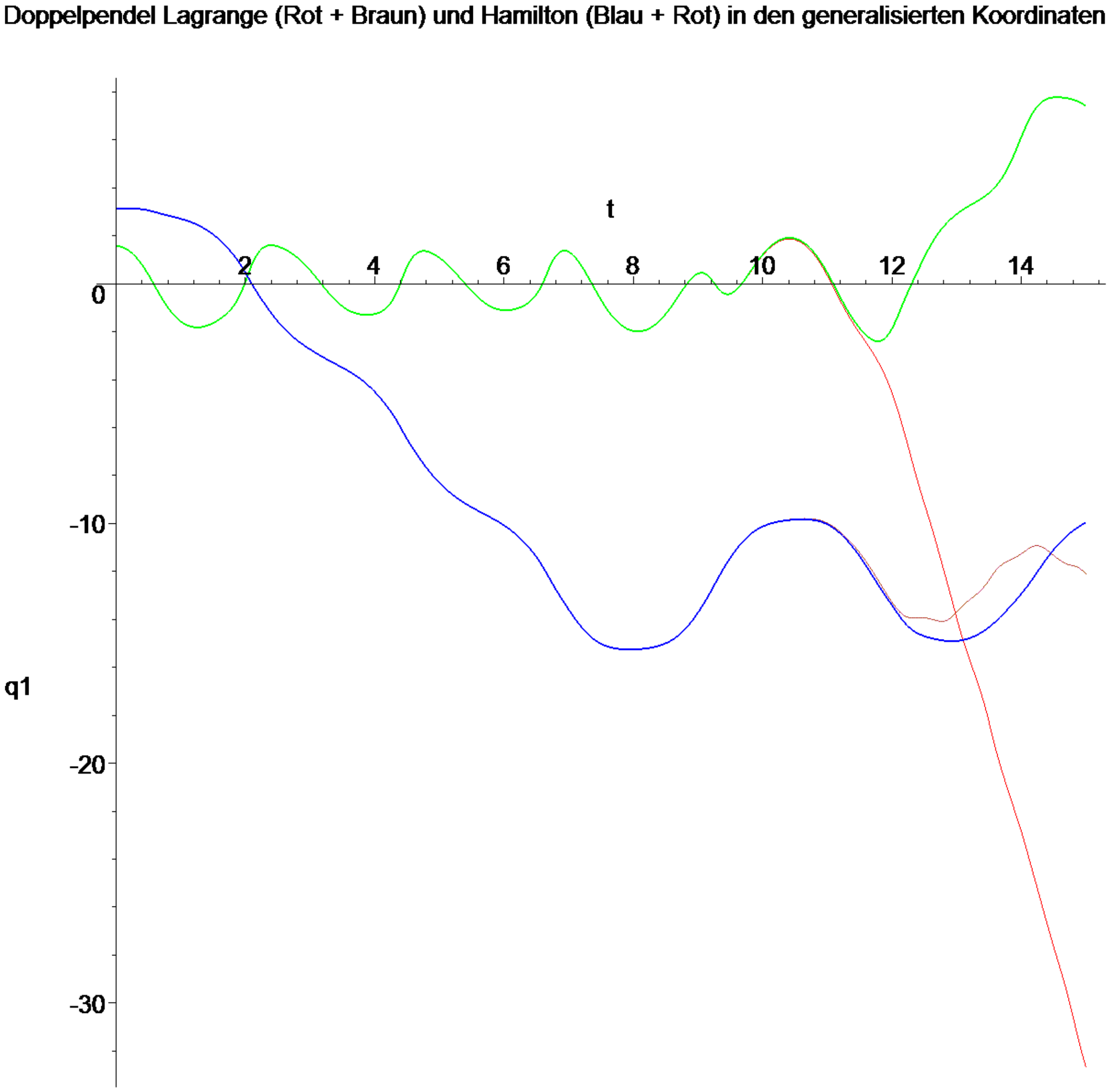
$$Loes\_Ham := [t = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}),\ p1(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}),\ p2(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}),\ q1(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}),\ q2(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc})]$$

```
> Loes_Lag:=dsolve({EulerLagr1,EulerLagr2,q1(0)=Aq1,D(q1)(0)=A_v1,q2(0)=Aq2,D(q2)(0)=A_v2},[q1(t),q2(t)],type=numeric,output=listprocedure);
```

$$Loes\_Lag := \left[t = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}),\ q1(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}),\ \frac{d}{dt} q1(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}),\ q2(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}),\ \frac{d}{dt} q2(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc})\right]$$

```
> with(plots):
  with(plottools):
> tend:=15:
  P1:=odeplot(Loes_Ham,[t,q1(t)],0..tend,numpoints=500,color=blue,thickness=2):
  P2:=odeplot(Loes_Ham,[t,q2(t)],0..tend,numpoints=500,color=green,thickness=2):
  P3:=odeplot(Loes_Lag,[t,q1(t)],0..tend,numpoints=500,color=brown):
  P4:=odeplot(Loes_Lag,[t,q2(t)],0..tend,numpoints=500,color=red,title="Doppelpendel Lagrange (Rot + Braun) und Hamilton (Blau + Rot) in den generalisierten Koordinaten"):
```

```
display(P1,P2,P3,P4);
```




```
> phi1:=eval(q1(t),Loes_Ham);
  phi2:=eval(q2(t),Loes_Ham);
  pq1:=eval(p1(t),Loes_Ham);
  pq2:=eval(p2(t),Loes_Ham);
```

$$\phi 1 := \mathbf{proc}(t) \;\; \ldots \;\; \mathbf{end\ proc}$$

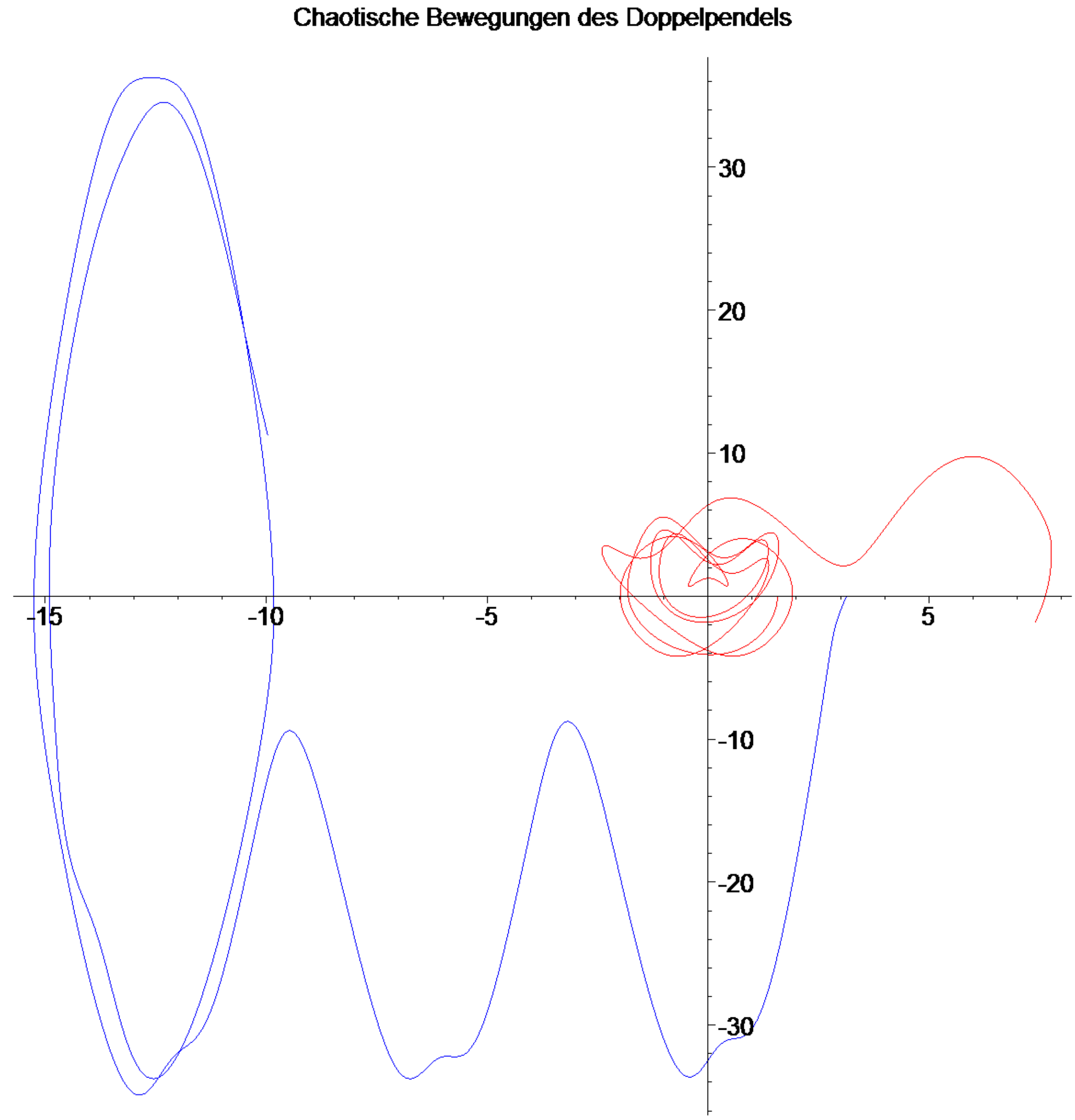
$$\phi 2 := \mathbf{proc}(t) \;\; \ldots \;\; \mathbf{end\ proc}$$

$$pq1 := \mathbf{proc}(t) \;\; \ldots \;\; \mathbf{end\ proc}$$

$$pq2 := \mathbf{proc}(t) \;\; \ldots \;\; \mathbf{end\ proc}$$

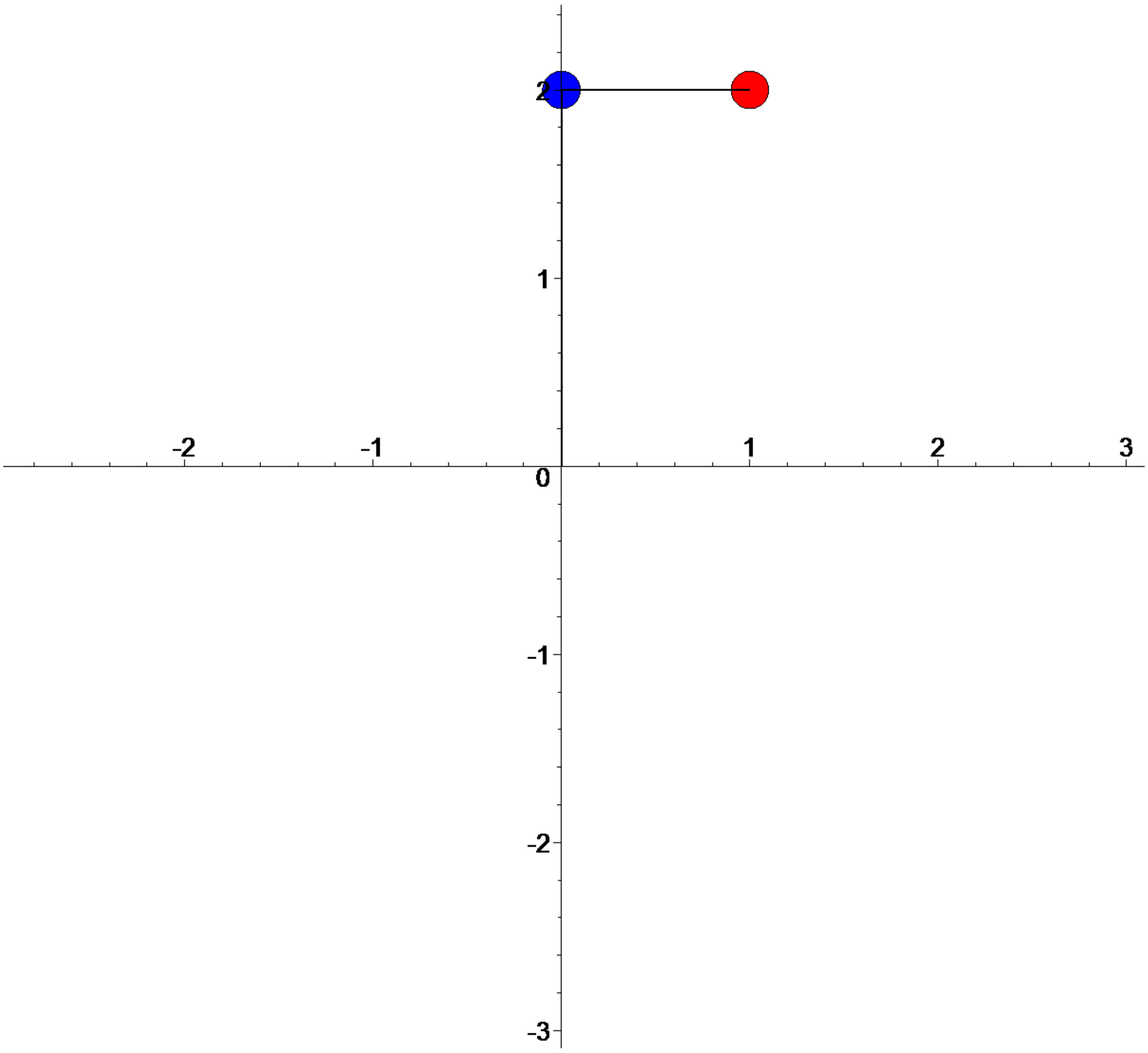
```
> N:=50:
  PD1:=listplot([seq([phi1(n/N),pq1(n/N)],n=0..tend*N)],colo
  r=blue):
  PD2:=listplot([seq([phi2(n/N),pq2(n/N)],n=0..tend*N)],colo
```

```
r=red,title="Chaotische Bewegungen des Doppelpendels"):
>
> display(PD1,PD2);
```




```
> phi1:=eval(q1(t),Loes_Ham):
  phi2:=eval(q2(t),Loes_Ham):
> x1:=t->l1*sin(phi1(t)):
  y1:=t->-l1*cos(phi1(t)):
  x2:=t->l2*sin(phi2(t)) + l1*sin(phi1(t)):
  y2:=t->-l2*cos(phi2(t))-l1*cos(phi1(t)):
> frames:=500:
  for i from 0 by 1 to frames do
  Seil1[i]:=curve([[0,0],[x1(i*tend/frames),y1(i*tend/frames
  )]],thickness=2,color=black):
  Masse1[i]:=display(disk([x1(i*tend/frames),y1(i*tend/frame
  s)],0.1,color=blue)):
  Seil2[i]:=curve([[x1(i*tend/frames),y1(i*tend/frames)],[x2
  (i*tend/frames),y2(i*tend/frames)]],thickness=2,color=blac
```

```
k):
Masse2[i]:=display(disk([x2(i*tend/frames),y2(i*tend/frames)],0.1,color=red)):
Ani[i]:=display({Masse1[i],Seil1[i],Masse2[i],Seil2[i]});
od:
> display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained);
```




```
>
>
```