

Ich habe lange nachgedacht, was für mich die interessanteste Formel der Physik bzw. Mathematik ist. Hier ist mein persönlicher Favorit: die Gleichung zur sogenannten axialen (oder auch chiralen) Anomalie - einmal in lokaler und einmal in globaler Form.

Was mich fasziniert ist, dass diese Gleichung sehr interessante Physik beschreibt und dass sie ganz verschiedene Bereiche der Mathematik miteinander in Beziehung setzt.

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{1}{8\pi^2} F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}$$

$$\text{ind}(i\gamma^\mu D_\mu) = \int_M \text{ch}_2(F)$$

$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ ist die kovariante Ableitung.

$j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ ist der sogenannte axiale Strom, er entspricht der Differenz aus den Strömen der rein rechts- bzw. rein linkshändigen Fermionen. Der gewöhnliche elektrische Strom $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ entspricht deren Summe. ψ sind die Spinoren der Fermionen.

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ist der elektromagnetische Feldstärkentensor. $*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}F^{\sigma\rho}$ ist der duale Feldstärkentensor (hier haben elektrisches und magnetisches Feld die Rollen vertauscht).

Aus den Gleichungen der klassischen Elektrodynamik bzw. den Gleichungen mit Fermionen (Diracgleichung) folgt, dass neben dem gewöhnlichen elektrischen Strom j^μ auch der axiale Strom j_5^μ erhalten ist, d.h. es gibt eine Kontinuitätsgleichung und eine erhaltene axiale Ladung. Grund ist neben der (lokalen) elektromagnetischen

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha}\psi$$

eine zweite (globale) axiale Eichsymmetrie

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha\gamma_5}\psi$$

der Elektrodynamik, aus der man diesen Strom ableiten kann.

Quantisiert man nun die Elektrodynamik, so zerstört dies zwingend eine der beiden Symmetrien, so dass

nur einer der beiden Ströme erhalten sein kann. Aus physikalischen Gründen (Erhaltung der elektrischen Ladung Q) und aufgrund mathematischer Konsistenz muss man die Erhaltung des gewöhnlichen elektrischen Stromes fordern.

Die axiale Symmetrie ist also in der QED verletzt, auf der rechten Seite der Kontinuitätsgleichung steht die sogenannte Anomalie (es handelt sich nicht um eine spontane Symmetriebrechung). Die Anomalie ist ein rein quantenmechanischer Effekt, den man aus Feynmandiagrammen oder Pfadintegralen ableiten kann.

Die Bedeutung der Anomaliegleichung zeigt sich in physikalischen Prozessen, in denen die axiale Ladung Q_5 nicht erhalten ist, in denen also ein Teilchen, das eine axiale Ladung trägt, in zwei Photonen (entsprechend den zwei Feldstärketensoren) zerfallen kann. Dies beobachtet man experimentell im Pion-Zerfall $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$.

Integriert man die beiden Seiten der Anomaliegleichung, so findet man auf der rechten Seite eine topologische Größe, der zweite Chern-Charakter $\text{ch}_2(F)$, der die topologische Struktur der Kombination von vierdimensionaler Mannigfaltigkeit und elektromagnetischem Potential A_μ beinhaltet. Auf der linken Seite steht eine analytische, lokale Struktur, der sogenannte Index des Diracoperators $i\gamma^\mu D_\mu$; er zählt die Differenz aus der Anzahl rechtshändigen und der linkshändigen Lösungen der Diracgleichung

$$\text{ind}(i\gamma^\mu D_\mu) = \nu^+ - \nu^-$$

Sowohl der analytische als auch der topologische Index (für den dies zunächst nicht ersichtlich ist), sind beide ganzzahlig.

Die integrale Form ist ein Spezialfall des sogenannten Indextheorems von Atiyah und Singer das eine Brücke zwischen Topologie und Analysis bildet und das eine herausragende Rolle in der theoretischen Physik und der Mathematik spielt. Es hat viele Entwicklungen in der Quantenfeldtheorie beeinflusst, u.a. Eichtheorien, Instantonen, Monopole und die Stringtheorie. Es gab dafür mehrere Auszeichnungen, u.a. die Fields-Medaille, vergleichbar einem Nobelpreis der Mathematik.