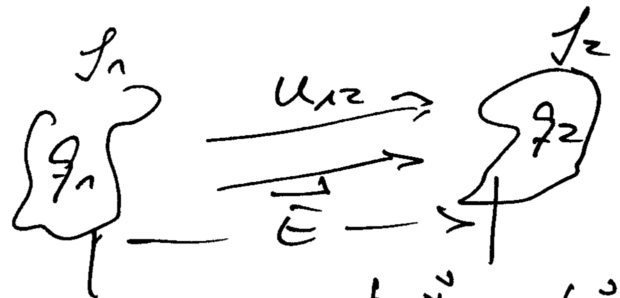
O. Fenten
Sept. 2005

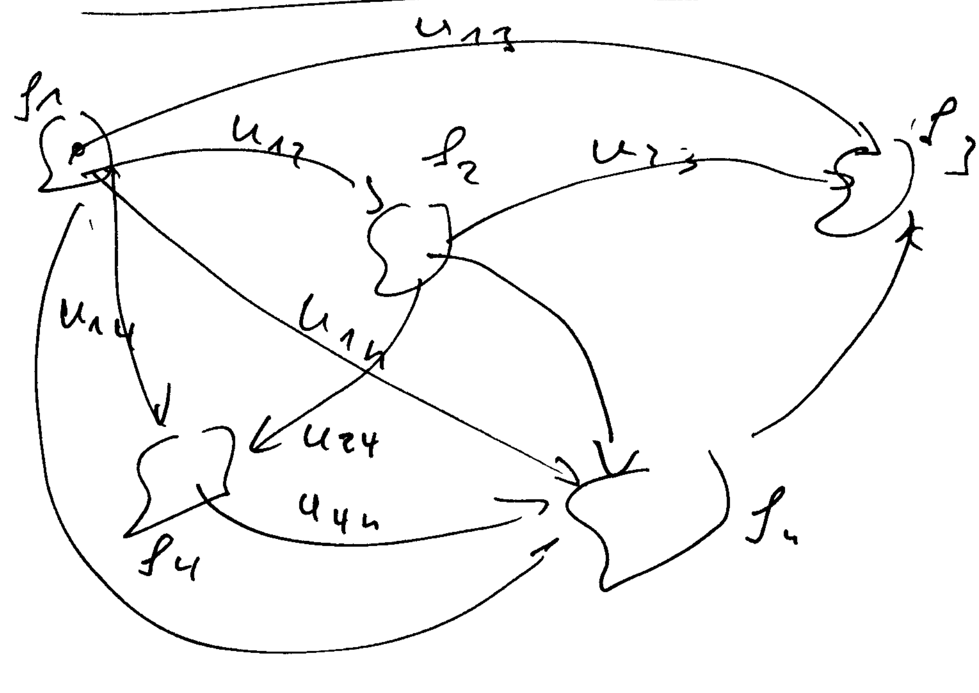
Materie im elektrischen Feld

Gegenüberstehende Ladungsgebiete spannen ein Feld auf



$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_A \vec{D}\, d\vec{a}}{\int_1^2 \vec{E}\, d\vec{s}}$$

n-Ladungswolken im Raum



Annahme:
Maxwell Gleichungen (MWG): linear
Material Gleichungen (MatG): linear

$$\varphi_1 = a_{11} Q_1 + a_{12} Q_2 + \dots a_{1i} Q_i + \dots + a_{1n} Q_n$$
$$\varphi_2 = a_{21} Q_1 + a_{22} Q_2 + \dots + a_{2i} Q_i + \dots + a_{2n} Q_n$$
$$\vdots$$
$$\varphi_k = a_{k1} Q_1 + a_{k2} Q_2 + \dots a_{ki} Q_i + \dots + a_{kn} Q_n$$
$$\vdots$$
$$\varphi_n = a_{n1} Q_1 + a_{n2} Q_2 + \dots a_{ni} Q_i + \dots a_{nn} Q_n$$

Elektrisches Feld im Raum

Es gilt: Überlagerungssatz:

~~Sind MWG linear,~~
Sind MWG und MatG linear,
läßt sich das Feld mehrere Ladungsgebiete (Punktladungen) als Summe der Teilfelder darstellen.

Einschränkungen: haben Ladungen endliche Ausdehnung dann können auf deren Oberflächen die Grenzbedingungen nicht erfüllt werden.

$\Rightarrow$ Potential aus n-Punktladungen =

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_i}{R_i} + C$$

mit R_i: Abstand zu den Ladungen.

Damit gilt für das Ladungsfeld:

$\Delta \varphi = \emptyset$

sowie die Grenzbedingung für das Potential auf den Ladungsoberflächen

$\Delta \Phi_i = \emptyset \qquad i = 1, 2 \ldots n$

$$\phi_i = \begin{cases} \varphi_i & \text{auf der iten Ladung} \\ \emptyset & \text{auf allen anderen Ladungen} \end{cases}$$

Für die k-te Ladung gilt dann:

$$Q_k = \oint_{A_k} \vec{D}\, d\vec{a} = -\varepsilon \oint_{A_k} \operatorname{grad} \varphi\, d\vec{a} =$$

$$= -\varepsilon \oint_{A} \operatorname{grad} \Phi_i\, d\vec{a}$$

$$= -\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \oint_{A_k} \frac{\partial \phi_i}{\partial n}\, da \quad \text{(Überlagerung)}$$

Also gilt im Ganzen:

$$Q_1 = C_{11} f_1 + C_{12} f_2 + \dots C_{1i} f_i + \dots C_{1n} f_n$$

$$Q_2 = C_{21} f_1 + C_{22} f_2 + \dots C_{2i} f_i + \dots C_{2n} f_n$$

$$\vdots$$

$$Q_k = C_{k1} f_1 + C_{k2} f_2 + \dots C_{ki} f_i + C_{kn} f_n$$

$$\vdots$$

$$Q_n = C_{n1} f_1 + C_{n2} f_2 + \dots C_{ni} f_i + C_{nn} f_n$$

$$C_{ki} = -\frac{\varepsilon}{f_i} \oint_{A_k} \frac{\partial \phi_i}{\partial n}\, da \;:\; \text{nennt sich}$$

| Maxwell'sche Kapazitäts Koeffizient |

Mit Hilfe $\operatorname{div}(u \cdot \vec{a}) = \vec{a} \operatorname{grad}(u) + u \operatorname{div}(\vec{a})$
und des Gauß Satzes
$\oint_A \vec{B}\, d\vec{a} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{B}\, dV$:

$$\int_V \operatorname{div}(\phi_k \operatorname{grad} \phi_i)\, dV = \oint_A \phi_k \operatorname{grad} \phi_i\, d\vec{a}' =$$

$$\int_V (\phi_k \Delta \phi_i + \operatorname{grad} \phi_k \operatorname{grad} \phi_i)\, dV$$

$d\vec{a}'$: Flächennormale

mit ϕ_i : Potential-Funktion
verschwindet der 1. Term des Volumenintegrals
auf der rechten Seite:

(A) $$\oint_A \phi_k \operatorname{grad} \phi_i\, d\vec{a}' = \int_V \operatorname{grad} \phi_k \operatorname{grad} \phi_i\, dV$$

Die äußere Integralfläche besitzt Radius ∞.

Das heißt: Im unendlich entfernten Beobachtungspunkt verhalten sich Ladungswolken wie Punktladungen

[Integrationsfläche $\sim r^2$]

→ Hüllenintegral von (A) (Seite 4 unten) verschwindet und damit folgt für (A):

$$\oint_A \phi_K \,\mathrm{grad}\,\phi_i \, d\vec{a}' = \sum_{i=1}^{n} \oint_{A_i} \phi_K \,\mathrm{grad}\,\phi_i \, d\vec{a}'$$

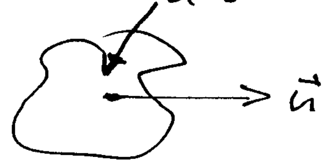
$$= \int_K \oint_{A_K} \mathrm{grad}\,\phi_i \, d\vec{a}'$$

Wegen Bedingung $\phi_i \begin{cases} \int_i \\ \emptyset \end{cases}$ → Seite 3

wird $i = K$ und damit:

$$\int_K \oint_{A_K} \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \, da = - \frac{\int_K \int_i}{\varepsilon} c_{Ki}$$

Ersatz der Flächennormalen $d\vec{a}'$ durch die normale $\vec{n}$:

Ladungswolke 

Damit folgt für C_{ki}:

$$\underline{C_{ki}} := \frac{\varepsilon}{\varphi_k \varphi_i}\int_V \operatorname{grad}\Phi_k \operatorname{grad}\Phi_i \, dV = \underline{C_{ik}}$$

Symmetrie !!

für $i \neq k$:

$$c_{ki} := -C_{ik}$$

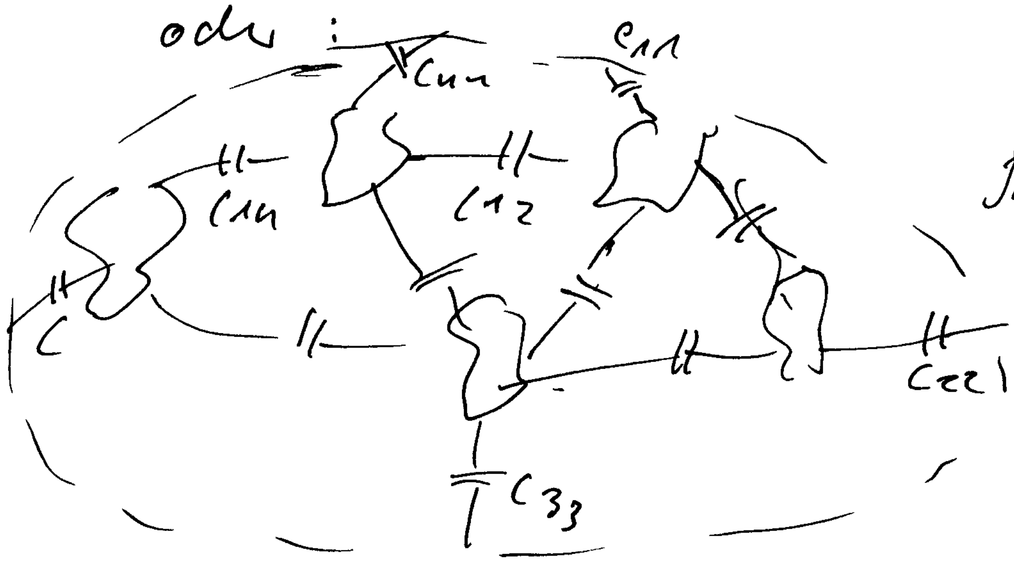
$$c_{kk} = c_{k1} + c_{k2} \cdots + c_{kn} = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} = -\sum_{i=1}^{n} C_{ik}$$

$$\Rightarrow Q_1 = c_{11}\varphi_1 + c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + \cdots + c_{1n}(\varphi_1 - \varphi_n)$$

$$Q_2 = c_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + c_{22}(\varphi_2) + \cdots + c_{2n}(\varphi_2 - \varphi_n)$$

$c_{kk}\varphi_k$

oder:



Integralhülle

$$Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ki}(\varphi_k - \varphi_i)}_{\text{Teilkapazitäten}} + \overbrace{\sum_{k=1}^{n} c_{kk}\varphi_k}^{\text{Hüllenanteil}}$$

Energieinhalt des elektrostatischen Feldes

Voraussetzung: Alle Ladungen sind Punktladungen (siehe Seiten 1-7))

Im raumladungsfreien und feldfreien Raumgebiet wird auf eine Ladung keine Kraft ausgeübt.

Im ∞ liegt der ~~Ord~~ Ort der Ladung und dann gilt:

$A_1 = 0$ $\qquad$ A: Arbeit

Bringt man eine Ladung in dessen Nähe muß Arbeit geleistet werden

$$A_2 = Q_2 \cdot \varphi_2 \qquad \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}$$

Dritte Ladung kommt dazu:

$$A_3 = Q_3 \varphi_3 \; ; \; \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon(\vec{r}_3 - \vec{r}_2)}$$

$$A_i = Q_i \varphi_i \; ; \; \varphi_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{4\pi\varepsilon(\vec{r}_i - \vec{r}_k)}$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_1 = \sum_{i=1}^{n} Q_i \varphi_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_1 Q_k}{4\pi\varepsilon(\vec{r}_i - \vec{r}_k)}$$

$$W_{el} = A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_i Q_k}{4\pi \varepsilon (\vec{r}_i - \vec{r}_k)}$$

$\frac{1}{2}$ deshalb, da bei $k < i$ alle Elemente doppelt gezählt wurden

... schreib einfach mal die Glieder der Reihe hin und dann siehst du das.

Mit W_{el} ist die Arbeit, welche zum Aufbau der Punktladungen benötigt wurde noch nicht erklärt!

$$Q_i \mathrel{\hat=} dQ_i = \rho(\vec{r}_i)\, dV = \rho\, dV$$
$$Q_k \mathrel{\hat=} dQ_k = \rho(\vec{r}_k)\, dV' = \rho'\, dV'$$

Punktladung Q_i im Punkt $\vec{r}_i$ wird durch ein Volumenelement ersetzt. dito Q_k

$$W_{el} = \frac{1}{2} \iint_{V\,V'} \frac{\rho \rho'\, dV\, dV'}{4\pi \varepsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad r \to 0$$

$$\text{mit } \varphi(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')\, dV'}{4\pi \varepsilon |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

phi:

$$\text{wird } W_{el} = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r})\, dV$$

$$\rho(\vec{r}) = -\varepsilon\, \Delta \varphi(\vec{r})$$

$$W_{el} = -\frac{\varepsilon}{2} \int_V \varphi(\vec{r})\, \Delta \varphi(\vec{r})\, dV$$

Es gilt:

$$\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\varphi) = \varphi \Delta \varphi + (\operatorname{grad}\varphi)^2$$

$$\varphi \Delta \varphi = \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\varphi) - (\operatorname{grad}\varphi)^2$$

$$W_{el} = \frac{\varepsilon}{2}\left(-\int_V \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\varphi) + \int_V (\operatorname{grad}\varphi)^2 \, dV\right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\left(-\oint_A \varphi \operatorname{grad}\varphi \, d\vec{a} + \int_V (\operatorname{grad}\varphi)^2 \, dV\right)$$

Wird die Integrationsfläche so groß: $r \Rightarrow \infty$ folgt da $\operatorname{grad}\varphi \sim \frac{1}{r^2}$ ist:

$$W_{el} = \frac{\varepsilon}{2}\int_V (\operatorname{grad}\varphi)^2 \, dV =$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_V \vec{E}^2 \, dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\cdot\vec{D} \, dV$$

$$\boxed{w_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon \vec{E}^2 = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} = \frac{1}{2\varepsilon}\vec{D}^2}$$

$$W_{el} = \int_0^D \vec{E} \, \delta\vec{D}$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\, \varphi(\vec{r})\, dV$$

$$= \frac{1}{2} U \int \rho \, dV = \frac{1}{2} U \cdot Q = \frac{1}{2} C U^2$$

Ladungswolke

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Coulombgesetz

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

$$W_{el} = \frac{\varepsilon}{2}\int_V (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 dV$$ wenn eine 2. Ladung dazukommt

$$= \frac{\varepsilon}{2}\left(\int_V \vec{E}_1^2 dV + \int_V \vec{E}_2^2 dV + \int_V 2\vec{E}_1 \vec{E}_2 dV\right)$$

da steht 'ne 2 !!

Felder von Ladungen sind Gradientenfelder:

$$W_{el} = \varepsilon \int_V \vec{E}_1 \vec{E}_2 \, dV = -\varepsilon \int_V \vec{E}_2 \operatorname{grad} \varphi_1 \, dV = - \int_V \vec{D}_2 \operatorname{grad} \varphi_1 \, dV$$

φ_1 wird als Potential dabei dem Feld E_1 zugeordnet.

$$\operatorname{div}(\varphi_1 \vec{D}_2) = \vec{D}_2 \operatorname{grad} \varphi_1 + \varphi_1 \operatorname{div} \vec{D}_2$$

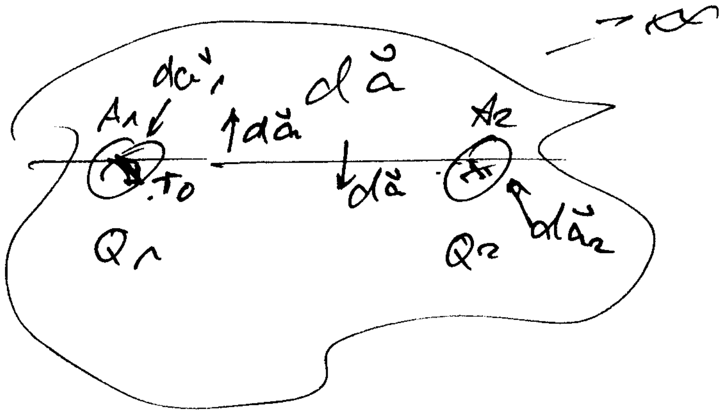
=> Wechselwirkungsenergie des Feldes

$$W_{el} = \int_V \varphi_1 \operatorname{div} \vec{D}_2 \, dV - \int_V \operatorname{div}(\varphi_1 \vec{D}_2) \, dV$$

Felder der Ladungen sind außerhalb des Feldbereichs divergenzfrei.

Mit Gauß Satz:

$$W_{el} = -\oint_A \varphi_1 \vec{D}_2 \cdot d\vec{a}$$



Achtung bei Gauß hier:
Volumenbereiche der Ladungen <u>müssen</u> ausgeschlossen werden.

=> Integralfläche so wählen, daß Ladungen nicht enthalten sind.

Außenhülle in der Unendlichkeit da $\varphi \sim \frac{1}{r}$ $D \sim \frac{1}{r^2}$ → werden damit $\emptyset$

=> Es bleibt nur das Integral über den beiden Ladungshüllen.

Da die Flächennormale aus dem Feldbereich vektoriell gesehen zeigt, ist die Vektorrichtung damit <u>in</u> den Ladungsbereich.

$$W_{el} = -\oint_{A_1} \varphi_1 \vec{D}_2 \, d\vec{a}_1 - \oint_{A_2} \varphi_1 \vec{D}_2 \, d\vec{a}_2$$

Auf der Integralfläche A_2 ist $\vec{D}_2$ endlich.

$\varphi_1 \sim \frac{1}{r_0}$ ⇒ Integrationsfläche wird <u>um die Ladung herum</u>

<u>punktförmig klein gemacht</u>

⇒ das erste Flächenintegral wird $\emptyset$

Fläche $\sim \frac{1}{r_0^2}$

$$\Rightarrow W_{el} = -\oint_{A_2} \varphi_1 \vec{D}_2 \, d\vec{a}_2 \approx -\varphi_1(r) \oint_{A_2} \vec{D}_2 \, d\vec{a}_2$$

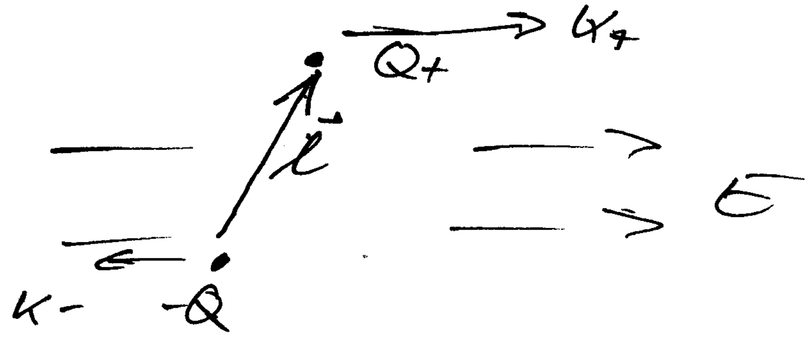
Berücksichtigen wir die <u>Richtung</u> der Flächennormalen ergibt sich daß das <u>negative Flächenintegral</u> gleich der

<u>Ladung</u> Q_2 ist

$$W_{el} = \varphi_1 \cdot Q_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r}$$

Wird diese Ladung um $d\vec{r}$ verschoben ≙ Abstand wird größer und Verschiebung entspricht der Richtung der Verbindungsstrecke ⇒

$$F = -\frac{dW_{el}}{dr} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$



Daraus folgt Drehmoment

$$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{l} \times \vec{K}_+ - \vec{l} \times \vec{K}_-\right)$$

$$\vec{K}_+ = Q\,\vec{E}$$
$$\vec{K}_- = -Q\,\vec{E}$$

Geladenes Teilchen im elektrostatischen Feld

Teilchen hat Ruhemasse m_0

$\vec{F} = m_0 \cdot \vec{b}$ $\quad$ $\vec{b}$: Beschleunigung z. B. Geschwindigkeit

Im Feld gilt der Satz der Energieerhaltung:

$$\frac{m_0}{2} v^2 - \frac{m_0}{2} v_0^2 = A$$

Die Arbeit, die das Feld dann leistet ist:

$$A = \int_1^2 \vec{K}\, d\vec{s} = \int_1^2 Q \vec{E}\, d\vec{s} = Q \int_1^2 \vec{E}\, ds = Q \cdot U$$

$$v = \sqrt{\frac{2QU}{m_0} + v_0^2}$$

bei $v_0 = 0$: $v = \sqrt{\frac{2QU}{m_0}}$

Wird eine Beschleunigungsspannung U_B angelegt folgt:

$$v = \sqrt{\frac{2Q}{m_0}(U + U_B)}$$

$r(t)$ ~~Ort~~ Ortsvektor des Teilchens

$$\frac{dr(t)}{dt} = v = \dot{r}(t) \qquad v(t) = \dot{r}(t) = \frac{Q \cdot \vec{E}}{m_0} t$$

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt} = \ddot{r}(t) = \frac{Q \cdot \vec{E}}{m_0}$$

$$r(t) = \frac{Q \cdot \vec{E}}{2 m_0} t^2 + \vec{r}_1 \cdot t + \vec{r}_2$$

Lösung der DGL durch Anfangsbedingungen z. B. Koord. system f. $t = t_0$ (0) auf $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\ddot{x} = \frac{QE}{m_0} \qquad \ddot{y} = 0 \qquad \ddot{z} = 0$$

$$m_0 \ddot{r} = Q\vec{E} = QE \cdot \vec{e}_x$$

$$\dot{x} = \frac{QE}{m_0} t + C_1$$

$$x = \frac{QE}{2m_0} t^2 + C_1 t + C_2$$

C_1 und C_2 aus Anfangsbedingungen

$t = 0: \ \dot{x} = v_0 \cos\alpha$

$C_1 = v_0 \cos\alpha \qquad C_2 = \emptyset$

$$x = \frac{QE}{2m_0} t^2 + v_0 t \cos\alpha$$

$$y = C_3 t + C_4$$

$$z = C_5 t + C_6$$

mit ~~[illegible]~~ Anf. Bed

$t = \emptyset \quad y = 0 \quad \dot{y} = v_0 \sin\alpha$

$z = 0 \quad \dot{z} = 0 :$

$C_3 = v_0 \sin\alpha \qquad C_4 = 0 \qquad C5 = 0 \qquad C6 = 0$

$y = v_0 t \sin\alpha$

$z \equiv \emptyset$

$$x = \frac{QE}{2m_0} t^2 + v_0 t \cos\alpha$$

$$y = v_0 t \sin\alpha$$

t gleichsetzen (gültig solange es fliegt!)

$$t = \frac{y}{v_0 \sin\alpha}$$

$$x = \frac{QE}{2m_0} \frac{y^2}{v_0^2 \sin^2\alpha} + \frac{v_0 \cos\alpha}{v_0 \sin\alpha} y$$

$$= \frac{QE}{2m_0} \frac{y^2}{v_0^2 \sin^2\alpha} + y \cot\alpha$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{QE}{m_0} t + v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} =$$

$$= \sqrt{v_0^2 + \frac{2QE}{m_0} v_0 t \sin\alpha + \frac{Q^2 E^2}{m_0^2} t^2}$$

falsch gemacht! heißt $\cos\alpha$!!!