

Einführung in die Grundlagen der Stringtheorie

Patrick Mangat

Juni 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Der relativistische String	1
2	Quantisierung des relativistischen Strings	18

Zusammenfassung

In der vorliegenden „Einführung in die Grundlagen der Stringtheorie“ werden die Inhalte der zweistündigen Vorlesung „Stringtheorie I“ (Universität Regensburg, Sommersemester 2011) und Teile des Buches „A first course in String Theory“ (Barton Zwiebach, Cambridge University Press, 2nd edition) in einer „Motivation-Definition-Satz-Beweis-Struktur“ zusammengefasst, ohne Anspruch auf mathematische Exaktheit (stellenweise müssen z.B. Funktionen einfach gutartig sein). Das Ziel wird sein, den Bosonischen String mathematisch zu beschreiben und die Implikationen einer Bosonischen Stringtheorie zu untersuchen. Leser sollten mit Analysis, Linearer Algebra und der theoretischen Mechanik sowie Quantenmechanik vertraut sein. Idealerweise ist der Leser (im Gegensatz zum Autor) mit den Konzepten der Quantenfeldtheorie vertraut.

Da das Skript ursprünglich zum reinen Selbstzweck dienen sollte, kann es vorkommen, dass die ein oder anderen Stellen zu ausführlich oder zu knapp sind. Insbesondere wurde das Skript (noch) nicht auf Fehler überprüft.

1 Der relativistische String

1.1 Motivation. Die Minimierung einer Weltlinie eines Teilchens im Minkowski-Raum \mathbb{M}^{D+1} , liefert die tatsächliche Bewegung (eine Linie) desselben. In der Stringtheorie untersucht man die Dynamik von (elastischen) Saiten, sog. Strings, welche sowohl offen als auch geschlossen sein können. Die Bewegung eines Strings im \mathbb{M}^{D+1} hinterlässt eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des Minkowski-Raumes. Diese ist eine offene Fläche, falls der String offen ist und eine Art Röhre, wenn der String geschlossen ist. Tatsächlich erhält man die Bewegungsgleichungen dieser Strings, wenn man (analog zu den Teilchen) einfach diese zweidimensionale Fläche minimiert.

Dazu müssen wir zunächst diese Fläche mathematische beschreiben, wofür zwei Parameter nötig sind, diese nennen wir ξ^1, ξ^2 . Es lässt sich dann jeder Punkt \vec{X} schreiben als $\vec{X}(\xi^1, \xi^2)$. Wir können nun, da eine 2-dim. Untermannigfaltigkeit vorliegt, zwei Tangentialvektoren konstruieren, die in einem Punkt auf der Fläche den Tangentialraum aufspannen. Sie lauten bei infinitesimal kleiner Bewegung entlang der definierten Koordinatenachsen:

$$(1.1) \quad d\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} d\xi^1$$

$$(1.2) \quad d\vec{v}_2 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} d\xi^2$$

Das dadurch aufgespannte Parallelogramm besitzt die Fläche (θ sei der Winkel der beiden Tangentialvektoren):

$$\begin{aligned} dA &= |d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| \sin \theta = \sqrt{|d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 - (|d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| \cdot \cos \theta)^2} = \\ &= \sqrt{(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1)(d\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2) - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2} = d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2}\right)^2} \end{aligned}$$

Somit bekommt man für die Fläche die Formel

$$(1.3) \quad A = \int \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2}\right)^2}.$$

Da $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2}$ Basisvektoren (des Tangentialraums) darstellen, bekommt man durch

$$(1.4) \quad g_{ij} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^j}$$

die induzierte Metrik g_{ij} .

Man findet dann eine kurze Formel für die Flächenberechnung:

$$(1.5) \quad A = \int \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}, \quad g = \det g_{ij}$$

Wichtig ist nun aber auch, dass die Fläche A *reparametrisierungsinvariant* ist. Tatsächlich gilt:

1.2 Satz (Reparametrisierungsinvarianz des Flächenintegrals). Es bleibt (1.3) invariant unter einer Transformation $(\xi^1, \xi^2) \mapsto (\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2)$.

Beweis. Aus der Maß- und Integrationstheorie ist bekannt, dass

$$(1.6) \quad d\xi_1 d\xi_2 = \left| \det \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^j} \right) \right| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2$$

Bei $J_{ij} = \frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^j}$ handelt es sich um die Jacobi-Matrix. Entsprechend gilt

$$(1.7) \quad d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 = |\tilde{J}| d\xi_1 d\xi_2$$

mit $\tilde{J} = \det \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j} \right)$. Es folgt aus den beiden Gleichungen sofort, dass

$$(1.8) \quad |J| |\tilde{J}| = 1.$$

Wir wissen aber auch, dass

$$(1.9) \quad \sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}} |\tilde{J}|.$$

Daher bekommen wir

$$\int \int d\xi_1 d\xi_2 \sqrt{g} = \int \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 |J| \sqrt{\tilde{g}} |\tilde{J}| = \int \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}}.$$

□

1.3 Korollar (Beschreibung der Weltfläche im Minkowski-Raum). Zur Beschreibung der Weltfläche im \mathbb{M}^{D+1} wählen wir die Parameter τ und σ (suggestiv für Zeit und Raum, allerdings können die Parameter auch etwas anderes beschreiben) und führen den Vierervektor $X^\mu(\tau, \sigma)$ für die Stringkoordinaten ein, wobei $\mu \in \{0, 1, \dots, D\}$. Wir erhalten dann

$$(1.10) \quad A = \int \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}\right)}.$$

Damit der Radikand nie negativ wird, wurde das Vorzeichen aus (1.3) vertauscht.

Beweis. Wir zeigen nur, dass

$$\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}\right) \geq 0.$$

Dazu betrachte man alle Tangentialvektoren

$$v^\mu(\lambda) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Man bekommt damit Tangentialvektoren in beliebiger Richtung (weil die beiden oben kombinierten Vektoren eine Basis bilden), nur nicht in Richtung von $\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$, denn dafür müsste $\lambda = \infty$. Insbesondere bekommt man damit sowohl raum- als auch zeitartige Vektoren. Daher kann $v^\mu v_\mu(\lambda)$ sowohl positiv als auch negativ sein, d.h. das quadratische Polynom in λ

$$v^\mu v_\mu(\lambda) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} + 2\lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} + \lambda^2 \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}$$

muss wenigstens eine Nullstelle haben. Also muss die Diskriminante der quadratischen Gleichung niemals negativ werden. Aber die Diskriminante ist gerade der Radikand. \square

1.4 Bemerkung. Jetzt haben wir also eine Fläche, deren Minimum zu den Bewegungsgleichungen des Strings führen soll. Da in der Physik genau die Wirkung S diese Rolle einnimmt, dass deren Extremum auf die Bewegungsgleichungen führt, ist es naheliegend, (1.10) zur Konstruktion der Wirkung zu benutzen.

1.5 Definition (Die Nambu-Goto-Wirkung). Die Nambu-Goto-Wirkung, die tatsächlich aus der obigen Idee konstruiert wird, lautet:

$$(1.11) \quad S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X}^\mu X'_\mu)^2 - (\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu) (X'^\mu X'_\mu)}$$

Die Lagrange-Dichte ist dann

$$(1.12) \quad \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X}^\mu X'_\mu)^2 - (\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu) (X'^\mu X'_\mu)}$$

Dabei ist T_0 die sog. Stringspannung und $\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$, $X'^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$.

1.6 Satz (Bewegungsgleichungen eines Strings). Die Bewegungsgleichungen eines Strings ergeben sich zu

$$(1.13) \quad \frac{\partial P_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial P_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0$$

mit den kanonischen Impulsen

$$(1.14) \quad P_\mu^\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X}^\mu X'_\mu) X'_\mu - (X'^\mu X'_\mu) \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}^\mu X'_\mu)^2 - (\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)(X'^\mu X'_\mu)}},$$

$$(1.15) \quad P_\mu^\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X}^\mu X'_\mu) \dot{X}_\mu - (\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu) X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X}^\mu X'_\mu)^2 - (\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)(X'^\mu X'_\mu)}}.$$

Beweis. Zuerst rechnen wir die kanonischen Impulse nach:

$$P_\mu^\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{2(\dot{X}^\mu X'_\mu) X'_\mu - 2(X'^\mu X'_\mu) \dot{X}_\mu}{2\sqrt{(\dot{X}^\mu X'_\mu)^2 - (\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)(X'^\mu X'_\mu)}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X}^\mu X'_\mu) X'_\mu - (X'^\mu X'_\mu) \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}^\mu X'_\mu)^2 - (\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)(X'^\mu X'_\mu)}}$$

Völlig analog berechnet man P_μ^σ .

Durch Variation der Wirkung findet man wie immer die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \delta \dot{X}^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \delta X'^\mu \right] = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[P_\mu^\tau \frac{\partial (\delta X^\mu)}{\partial \tau} + P_\mu^\sigma \frac{\partial (\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right] = \\ &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (\delta X^\mu P_\mu^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\delta X^\mu P_\mu^\sigma) - \delta X^\mu \left(\frac{\partial P_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial P_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \right] = \\ &= \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\delta X^\mu P_\mu^\tau \right]_{\tau_i}^{\tau_f} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\delta X^\mu P_\mu^\sigma \right]_0^{\sigma_1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left(\frac{\partial P_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial P_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \end{aligned}$$

Der erste Term ist Null, denn so wie bei der Variation einer Teilchenbahn, sollen die Variation von Anfangs- und Endpunkten verschwinden: $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma) = 0, \delta X^\mu(\tau_f, \sigma) = 0$.

Der zweite Term wird durch die Wahl von Randbedingungen Null:

Die erste Möglichkeit ist die Benutzung der Dirichlet-Randbedingungen:

$$(1.16) \quad \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, \sigma_*) = 0, \quad \mu \neq 0, \sigma_* \in \{0, \sigma_1\}$$

Die zweite Möglichkeit, die Randbedingungen für freie Endpunkte (Neumann-RB), ist

$$(1.17) \quad P_\mu^\sigma(\tau, \sigma_*) = 0,$$

wobei diese Bedingung für $\mu = 0$ in jedem Fall zu gelten hat. \square

1.7 Bemerkung. Man kann die Dirichlet- und Neumann-RB wie folgt interpretieren: Betrachte einen String mit den Randbedingungen $X^\mu(\tau, \sigma_*) = 0$ für $\mu \in \{3, 4, \dots, D\}$. Dann befinden sich die Endpunkte des Strings auf der x^1-x^2 -Ebene im D -dimensionalen Raum. Die Endpunkte des Strings können sich frei auf der Ebene, der sog. D2-Brane (D für Dirichlet, 2 für zweidimensional), bewegen, erfüllen aber die Neumann-RB.

1.8 Beispiel(e). Betrachte unter der Parametrisierung ($\tau = t, \sigma$) einen statischen String mit $X^1(t, 0) = 0, X^1(t, \sigma_1) = a > 0, X^\mu = 0 \forall \mu \geq 2$. Weil dieser String statisch ist, existiert eine stetige, streng monoton wachsende Abbildung $f : [0, \sigma_1] \rightarrow \mathbb{R}, \sigma \mapsto f(\sigma)$ mit $X^1(t, \sigma) = f(\sigma)$. (Die Abb. muss monoton wachsend sein, damit jeder Punkt auf dem String eindeutig parametrisiert wird.)

Dann erhält man $\dot{X}^\mu = (c, 0, \vec{0}), X'^\mu = (0, f', \vec{0}), \dot{X}^\mu X'_\mu = 0$.

Einsetzen in die Nambu-Goto-Wirkung führt auf

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{c^2 (f')^2} = -T_0 \int_{t_i}^{t_f} dt (f(\sigma) - f(0)) = \int_{t_i}^{t_f} dt (-T_0 a).$$

Weil aber die kinetische Energie eines statischen Strings Null ist, gilt $L = -V = -T_0 a$, also $V = T_0 a$. Daran sieht man, dass die Interpretation von T_0 als Stringspannung richtig ist.

1.9 Notation. Im Folgenden meinen wir mit $\vec{X} \cdot \vec{X}, \dot{\vec{X}} \cdot \vec{X}$, etc. das Skalarprodukt zur Minkowski-Metrik.

1.10 Motivation. Wir wollen nun die Frage diskutieren, wie eine sinnvolle Geschwindigkeit eines Strings definiert werden kann. Offenbar ist die einfache Idee, $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$ (wir verwenden nun stets die Eichung $\tau = t$) als String-Geschwindigkeit zu setzen, nicht brauchbar. Denn dann wäre die Geschwindigkeit abhängig von der Parametrisierung, weil dieser Ausdruck eine Funktion von σ ist. Es erweist sich dagegen als sinnvoll, eine Transversalgeschwindigkeit \vec{v}_\perp zu definieren. Dazu benötigen wir einen Parameter s , wobei $s(\sigma)$ die Länge des Strings angibt (mit $s(0) = 0$ und $s(\sigma_1)$ als Gesamtlänge).

Es gilt dann

$$(1.18) \quad ds = |d\vec{X}| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right| |d\sigma|.$$

Wir erhalten, dass $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ ein Einheitsvektor ist:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 \stackrel{(1.18)}{=} 1$$

Weil $\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)_{t=\text{const}}$ entlang des Strings ausgerichtet ist, ist es auch $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$, so dass dieser Vektor ein Tangenteneinheitsvektor ist. Eine naheliegende Definition der Transversalgeschwindigkeit ist somit, dass \vec{v}_\perp eine Komponente von $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$ und senkrecht zu $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ sein soll:

1.11 Definition (Transversalgeschwindigkeit eines Strings). Die Transversalgeschwindigkeit eines Strings ist definiert als

$$(1.19) \quad \vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}.$$

1.12 Korollar. Die Nambu-Goto-Wirkung eines relativistischen Strings lautet umformuliert

$$(1.20) \quad S = -T_0 \int dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \left(\frac{v_\perp}{c} \right)^2}.$$

Beweis. Übung! □

1.13 Satz. Es treffen die folgenden Aussagen zu:

- i. Die Endpunkte eines Strings bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit.
- ii. Die Endpunkte bewegen sich transversal zum String.
- iii. In zwei Dimensionen ist

$$(1.21) \quad X^1 = l \cdot \cos\left(\frac{\sigma\pi}{\sigma_1}\right) \cos \tau, \quad X^2 = l \cdot \cos\left(\frac{\sigma\pi}{\sigma_1}\right) \sin \tau$$

mit der Stringlänge l eine Lösung der Bewegungsgleichung (1.13).

Beweis. Zunächst ist $\dot{X}^0 = c$, $\frac{\partial X^0}{\partial s} = c \frac{\partial t}{\partial s} = 0$. Damit erhalten wir unter Beachtung der Neumann-Randbedingungen (welche für $\mu = 0$ immer zu gelten haben, siehe auch (1.17)) für den (kontravarianten) kanonischen Impuls (vgl. (1.14)) folgende Bedingung für die Randpunkte:

$$(1.22) \quad P^{\sigma,0} = -\frac{T_0}{c} \frac{\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_\perp}{c}\right)^2}} = 0$$

Es folgt, dass $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \perp \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$ für die Endpunkte gilt. Daraus folgt ii..

Wir wissen also, dass an den Endpunkten $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0$ gilt. Es folgt damit

$$P^{\sigma,\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{c^2 \left(1 - \frac{v_{\text{bot}}^2}{c^2}\right) \frac{\partial X^\mu}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{bot}}^2}{c^2}}} = 0$$

für die Randpunkte. Also gilt $v_\perp = c$ für die Randpunkte, woraus i. resultiert.

Für iii. muss man nur rechnen, hier sind lediglich die Zwischenergebnisse angegeben ($c = 1$):

$$\begin{aligned} \sqrt{(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2 X'^2} &= l^2 \sin^2\left(\frac{\sigma\pi}{\sigma_1}\right) \frac{\pi}{\sigma_1} \\ P_0^\tau &= T_0 \frac{\pi}{\sigma_1} l \\ P_1^\tau &= -T_0 l \frac{\pi}{\sigma_1} \cos\left(\frac{\sigma\pi}{\sigma_1}\right) \sin \tau \\ P_2^\tau &= T_0 l \frac{\pi}{\sigma_1} \cos\left(\frac{\sigma\pi}{\sigma_1}\right) \cos \tau \\ P_0^\sigma &= 0 \\ P_1^\sigma &= T_0 l \frac{\pi}{\sigma_1} \sin\left(\frac{\sigma\pi}{\sigma_1}\right) \cos \tau \\ P_2^\sigma &= T_0 l \frac{\pi}{\sigma_1} \sin\left(\frac{\sigma\pi}{\sigma_1}\right) \sin \tau \end{aligned}$$

Man prüft nun leicht, dass die Bewegungsgleichungen erfüllt sind. □

1.14 Korollar. In Satz 1.13, Gl. (1.21) rotiert der String offenbar. Es gilt der folgende Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls L und der Energie E :

$$(1.23) \quad L \propto E^2$$

Beweis. Für die Energie gilt (Integral der 0.ten Komponente der Viererimpulsdichte!):

$$(1.24) \quad E = \int_0^{\sigma_1} P_0^\tau(\tau, \sigma) d\sigma = \pi T_0 l$$

Für den Drehimpuls hat man wie gewöhnlich ein Kreuzprodukt auszuwerten - wir betrachten die z -Komponente:

$$(1.25) \quad L_z = \int_0^{\sigma_1} (P_2^\tau X^1 - P_1^\tau X^2)(\tau, \sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi T_0} (\pi T_0 l)^2 \propto E^2.$$

□

1.15 Bemerkung. Tatsächlich findet man, dass für Hadronen $L \propto E^2$ gilt! Kann man daraus folgern, dass die Kräftewirkung zwischen Teilchen und Antiteilchen durch die Spannung eines Strings, der die Teilchen verbindet, beschrieben werden kann?

1.16 Beispiel(e) (Bewegung eines kreisförmigen geschlossenen Strings). Stellt man sich vor, dass ein kreisförmiger geschlossener String mit Radius $R(t)$ nur expandieren oder kontrahieren kann, dann gilt für die Transversalgeschwindigkeit $v_\perp = \dot{R}(t)$ und $\int ds = 2\pi R(t)$. Setzen wir dies in die Nambu-Goto-Wirkung ein, dann bekommen wir

$$S = -T_0 \int dt \int_0^{\sigma_1} \frac{ds}{d\sigma} d\sigma \sqrt{1 - \left(\frac{v_\perp}{c}\right)^2} = -T_0 \int dt \int ds \sqrt{1 - \left(\frac{v_\perp}{c}\right)^2} = -T_0 \int dt 2\pi R(t) \sqrt{1 - \left(\frac{v_\perp}{c}\right)^2}$$

Also haben wir die folgende Lagrange-Funktion:

$$L = -2\pi T_0 R(t) \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{R}}{c}\right)^2}$$

Das führt zur folgenden Bewegungsgleichung:

$$R\ddot{R} - \dot{R}^2 + c^2 = 0$$

Diese hat die nicht so sinnvolle Lösung $R(t) = ct$ (S wird zwar extremal, aber nicht minimal!) und einen sich periodisch dehnenden und zusammenziehenden String $R(t) = R_0 \cos\left(\frac{ct}{R_0}\right)$.

1.17 Satz (Nützliche String-Parametrisierung). Es existiert eine Parametrisierung σ , derart, dass,

$$(1.26) \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0$$

für alle $\sigma \in [0, \sigma_1]$. Neben dieser Bedingung sind dann noch drei weitere Gleichungen zu erfüllen:

$$(1.27) \quad \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = 0$$

$$(1.28) \quad \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1$$

$$(1.29) \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma \in \{0, \sigma_1\}} = 0$$

Beweis. Siehe Zwiebach, Kapitel 7. □

1.18 Motivation. Wir wollen nun unsere bisher gefundenen Gleichungen auf Erhaltungsgrößen, sog. *erhaltene Ströme*, untersuchen. Üblicherweise betrachtet man hierzu eine Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi^a, \partial_\alpha \phi^a)$ zu einem Feld ϕ^a , $a = 1, \dots, n$. Mit dem Prinzip der Variation der Wirkung findet man wie immer Euler-Lagrange-Gleichungen

$$(1.30) \quad \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} = 0.$$

Falls $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} = 0$, dann gilt mit $j^{a,\alpha} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^a)}$ ein erhaltener Strom, denn es muss die Kontinuitätsgleichung $\partial_\alpha j^{a,\alpha} = 0$ erfüllt sein.

Wir übertragen nun die Situation auf unsere Strings, wobei wir hier X^μ als String-Feld interpretieren. Es übernimmt dann μ die Rolle von a und $\alpha = \{\tau, \sigma\}$.

1.19 Satz. Es sind P_μ^τ, P_μ^σ erhaltene Ströme.

Beweis. Das folgt, weil \mathcal{L} nach (1.12) nicht von X^μ abhängt. □

1.20 Notation. Man schreibt auch

$$(1.31) \quad j_\mu^\alpha = P_\mu^\alpha \rightarrow (j_\mu^0, j_\mu^1) = (P_\mu^\tau, P_\mu^\sigma).$$

1.21 Definition (Raumzeit-Impuls eines Strings). In Anlehnung an die Elektrodynamik, in der die Ladung Q das Integral der Ladungsdichte über ein Volumen ist, und der kanonische Impuls im gewöhnlichen Lagrange-Formalismus eine Erhaltungsgröße ist, konstruiert man den Raumzeit-Impuls als Integral von P_μ^τ (entspricht hier offenbar der Ladungsdichte, siehe Bewegungsgleichung des Strings!) über σ :

$$(1.32) \quad p_\mu(\tau) = \int_0^{\sigma_1} d\sigma P_\mu^\tau(\tau, \sigma)$$

1.22 Satz. Es gilt für geschlossene Strings und offene Strings mit den Randbedingungen für freie Endpunkte:

$$(1.33) \quad \frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$$

Beweis.

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial P_\mu^\tau(\tau, \sigma)}{d\tau} d\sigma \stackrel{(1.13)}{=} - \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial P_\mu^\sigma}{d\sigma} d\sigma = - [P_\mu^\sigma]_0^{\sigma_1} = 0.$$

Warum ist das Null? Die letzte Gleichheit ist klar für geschlossene Strings. Für offene Strings und den Randbedingungen aus (1.17) verschwindet der Term ebenfalls. Für Dirichlet-Randbedingungen muss der Impuls p_μ des Strings keine Erhaltungsgröße sein. In diesem Falle kleben die Endpunkte des Strings an einer D-Brane, deren Impuls zusammen mit dem Impuls des Strings eine Erhaltungsgröße ist. □

1.23 Definition (Verallgemeinerung des Raumzeit-Impulses). Man kann (1.32) wie folgt verallgemeinern: Sei γ eine beliebige Kurve auf der Weltfläche des Strings. Dann setzen wir

$$(1.34) \quad p_\mu = \int_\gamma (P_\mu^\tau d\sigma - P_\mu^\sigma d\tau)$$

1.24 Bemerkung. Diese Definition ist folgendermaßen motiviert. Betrachte eine geschlossene Kurve Γ auf der Weltfläche ($\tau - \sigma$ -Diagramm). Es ist $(d\tau, d\sigma)$ an einem Punkt von Γ der Tangentenvektor in jenem Punkt. Entsprechend ist $(d\sigma, -d\tau)$ der Normalenvektor. Das Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} P_\mu^\tau \\ P_\mu^\sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\sigma \\ -d\tau \end{pmatrix} = P_\mu^\tau d\sigma - P_\mu^\sigma d\tau$$

des Stromes mit dem Normalenvektor entspricht einem infinitesimalen Fluss. Der gesamte Fluss kann dann beschrieben werden als

$$p_\mu = \oint_\Gamma (P_\mu^\tau d\sigma - P_\mu^\sigma d\tau).$$

1.25 Satz. Der Raumzeit-Impuls nach (1.34) ist auf einfach zusammenhängenden Gebieten unabhängig von der Wahl der Kurve.

Beweis. Wenn wir zeigen, dass das Integral entlang einer geschlossenen Kurve Γ verschwindet, sind wir fertig, da zwei Kurven γ_1, γ_2 , die wir für (1.34) benutzen können, nach Definition gemeinsame Anfangs- und Endpunkte darstellen und demzufolge zusammen eine geschlossene Kurve bilden. Es ist also

$$p_\mu = \oint_\Gamma (P_\mu^\tau d\sigma - P_\mu^\sigma d\tau) = 0$$

zu zeigen.

Hierzu benutzen wir den Satz von Stokes im Differentialformen-Kalkül: Sei M eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und ω eine $(n-1)$ -Form, dann ist

$$(1.35) \quad \int_M d\omega = \oint_{\partial M} \omega.$$

Wir wählen die 1-Form $\omega = P_\mu^\tau d\sigma - P_\mu^\sigma d\tau$. Also:

$$d\omega = \frac{\partial P_\mu^\tau}{\partial \tau} d\tau \wedge d\sigma - \frac{\partial P_\mu^\sigma}{\partial \sigma} d\sigma \wedge d\tau = \frac{\partial P_\mu^\tau}{\partial \tau} d\tau \wedge d\sigma + \frac{\partial P_\mu^\sigma}{\partial \sigma} d\tau \wedge d\sigma$$

Mit den Identifikationen $\partial M \equiv \Gamma$ und $d\tau d\sigma \equiv d\tau \wedge d\sigma$ folgt dann:

$$p_\mu = \oint_\Gamma (P_\mu^\tau d\sigma - P_\mu^\sigma d\tau) = \int_M \left(\frac{\partial P_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial P_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) d\tau d\sigma \stackrel{(1.13)}{=} 0$$

□

1.26 Motivation. Ähnlich wie wir die Nambu-Goto-Wirkung aus der Lorentz-Invarianz gewonnen haben, können wir mit Hilfe der Lorentz-Invarianz erhaltene Ströme konstruieren, was im Folgenden die Aufgabe sein wird. Diese erhaltenen Ströme werden bei der Quantisierung des relativistischen Strings eine bedeutende Rolle bekommen.

1.27 Lemma. Infinitesimale Lorentz-Transformationen sind Transformationen $X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu$ mit

$$(1.36) \quad \delta X^\mu = \epsilon^{\mu\nu} X_\nu,$$

wobei $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$.

Beweis. Zunächst ist $g_{\mu\nu}X^\mu X^{n\nu}$ eine Lorentzinvariante, daher ist $\delta(g_{\mu\nu}X^\mu X^{n\nu}) = 0$. Also

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(g_{\mu\nu}X^\mu X^{n\nu}) = 2g_{\mu\nu}(\delta X^\mu)X^\nu = 2g_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\rho}X_\rho X^\nu = 2\epsilon^{\mu\rho}X_\mu X_\rho = \\ &= \epsilon^{\mu\rho}X_\mu X_\rho + \epsilon^{\mu\rho}X_\mu X_\rho = \epsilon^{\mu\rho}X_\mu X_\rho + \epsilon^{\rho\mu}X_\rho X_\mu = (\epsilon^{\mu\rho} + \epsilon^{\rho\mu})X_\rho X_\mu \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt wurden im zweiten Term die Indizes umbenannt. Die Klammer muss also verschwinden, damit der Term Null werden kann. Daraus folgt die Behauptung. \square

1.28 Satz (Lorentzinvariante erhaltene Ströme). Wir definieren

$$(1.37) \quad \mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = X_\mu P_\nu^\alpha - X_\nu P_\mu^\alpha.$$

$\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha$ sind erhaltene Ströme.

Beweis. Wir wollen für die Rechnung nochmal bei der Feldtheorie starten: Die Lorentztransformation lässt die Lagrangedichte invariant, es ist demzufolge

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)}\delta(\partial_\alpha X^\mu) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\mu}\delta X^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)}\partial_\alpha(\delta X^\mu) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\mu}\delta X^\mu = \\ &= \partial_\alpha \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)}\delta X^\mu \right] - \partial_\alpha \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \right] \delta X^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\mu}\delta X^\mu = \partial_\alpha \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)}\delta X^\mu \right] \end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt unter Benutzung der Lagrangegleichungen. \square

Daher konstruieren wir den Strom wie folgt:

$$(1.38) \quad \epsilon^{\mu\nu}j_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)}\delta X^\mu \stackrel{(1.36)}{=} P_\mu^\alpha \epsilon^{\mu\nu}X_\nu$$

Wir können

$$(1.39) \quad \epsilon^{\mu\nu}j_{\mu\nu}^\alpha = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}(X_\mu P_\nu^\alpha - X_\nu P_\mu^\alpha)$$

schreiben, denn

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}(X_\mu P_\nu^\alpha - X_\nu P_\mu^\alpha) &= -\frac{1}{2}(-\epsilon^{\nu\mu}X_\mu P_\nu^\alpha - \epsilon^{\mu\nu}X_\nu P_\mu^\alpha) = \\ &= -\frac{1}{2}(-\epsilon^{\mu\nu}X_\nu P_\mu^\alpha - \epsilon^{\mu\nu}X_\nu P_\mu^\alpha) = P_\mu^\alpha \epsilon^{\mu\nu}X_\nu. \end{aligned}$$

1.29 Korollar. Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$(1.40) \quad \mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = -\mathcal{M}_{\nu\mu}^\alpha$$

$$(1.41) \quad \frac{\partial\mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau}{\partial\tau} + \frac{\partial\mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma}{\partial\sigma} = 0$$

Beweis. Die erste Gleichung sehen wir sofort an der Definition, die zweite folgt aus $\partial_\alpha(\epsilon^{\mu\nu}j_{\mu\nu}^\alpha) = 0$ unter Benutzung der Definition von $\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha$. \square

1.30 Definition. Analog zu (1.34) setzt man:

$$(1.42) \quad M_{\mu\nu} = \int_\gamma (\mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau d\sigma - \mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma d\tau)$$

(„Lorentz-Ladungen“)

1.31 Bemerkung. i. Wie man an der Definition von $\mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau$ sieht, kann man sich unter \mathcal{M}_{ij}^τ die Drehimpulsdichte des Strings vorstellen.

ii. Wie in Korollar 1.14 gesehen, gilt für den Drehimpuls $L = \frac{E^2}{2\pi T_0 c}$. Wir werden im Folgenden die Stringspannung T_0 durch den sog. „slope-Parameter“ α' ersetzen. Er wird derart eingeführt, dass

$$(1.43) \quad \frac{L}{\hbar} = \alpha' E^2.$$

Daraus erhält man

$$(1.44) \quad T_0 = \frac{1}{2\pi\alpha'\hbar c}.$$

Die Nambu-Goto-Wirkung wird damit zu

$$(1.45) \quad S = -\frac{1}{2\pi\alpha'\hbar c^2} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X}X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}$$

1.32 Motivation. Die Bewegungsgleichungen von Strings sehen in Lichtkegelkoordinaten handsamer aus, weswegen wir im Folgenden darauf hinarbeiten wollen, wofür noch ein gewisser Formalismus nötig ist. Aus diesem Grund wird die Quantisierung des Strings in diesen Lichtkegelkoordinaten durchgeführt.

Zunächst erinnern wir uns an die „Eichung“ $t = \tau$, d.h. wir arbeiten mit $X^0(\tau, \sigma) = c\tau$. Nun wollen wir uns allgemeinere Eichungen anschauen, nämlich solche, in denen τ eine Linearkombination der Stringkoordinaten ist:

$$(1.46) \quad n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda \tau$$

Man sieht, dass man durch $n = (1, 0, \dots, 0)$, $\lambda = c$ die alte Eichung $X^0(\tau, \sigma) = c\tau$ zurückbekommt.

Wir benutzen nun, dass p^μ eine Erhaltungsgröße, und daher $np = n_\mu p^\mu$ eine Konstante ist. Aus (1.46) erhält man durch $\lambda = \tilde{\lambda} n \cdot p$ die Beziehung

$$(1.47) \quad n \cdot X(\tau, \sigma) = \tilde{\lambda} (n \cdot p) \tau.$$

Allerdings ist p^μ genau genommen nur eine Erhaltungsgröße, falls der String geschlossen ist, oder beim offenen String dessen Endpunkte frei beweglich sind, siehe auch Satz 1.22 (inkl. Beweis). Wir nehmen aber im Folgenden an, dass der Vektor n in dem Fall, dass der String den Dirichlet-RB genügt, so gewählt ist, dass $n \cdot p$ konstant ist. Dazu werden wir ansetzen, dass $n \cdot P^\sigma = 0$, denn das impliziert, dass $n \cdot p$ eine Erhaltungsgröße ist. Um das zu sehen, multipliziert man am besten die im Beweis von Satz 1.22 durchgeführte Rechnung mit n^μ .

Wie sieht nun $\tilde{\lambda}$ aus? Nun, die linke Seite der obigen Gleichung hat die Einheit Meter, die rechte Seite Newton mal Sekunde. Somit nutzen wir die natürliche Wahl

$$(1.48) \quad \tilde{\lambda} \propto \frac{c}{T_0} = 2\pi\alpha'\hbar c^2.$$

In den Einheiten $\hbar = c = 1$ setzen wir $\tilde{\lambda} = 2\alpha'$, was zu

$$(1.49) \quad n \cdot X(\tau, \sigma) = 2\alpha' (n \cdot p) \tau$$

führt.

Nun haben wir eine Parametrisierung von τ festgelegt, wir müssen uns aber noch um die σ -Parametrisierung kümmern. Die Annahme, dass der String eine konstante Energiedichte $P^{\tau 0}$ haben soll, resultiert in der Verallgemeinerung, dass $n_\mu P^{\tau\mu}$ eine Konstante für den ganzen String sein soll:

$$(1.50) \quad n \cdot P^\tau(\tau, \sigma) = a$$

Wegen (1.32) folgt durch Multiplikation von links mit n :

$$n \cdot p = \int_0^{\sigma_1} d\sigma n \cdot P^\tau(\tau, \sigma) = \sigma_1 a$$

folgt

$$(1.51) \quad a = \frac{n \cdot p}{\sigma_1}.$$

In der Stringtheorie hat sich eingebürgert, dass man für offene Strings $\sigma_1 = \pi$ und für geschlossene $\sigma_1 = 2\pi$ setzt. Damit lassen sich beide Eichungen/Parametrisierungen in der folgenden Definition zusammenfassen:

1.33 Definition (Verallgemeinerte Eichungen für offene und geschlossene Strings). Die allgemeinen Eichungen für offene und geschlossene Strings sehen wie folgt aus:

$$(1.52) \quad n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta \alpha' (n \cdot p) \tau$$

$$(1.53) \quad n \cdot p = \frac{2\pi}{\beta} n \cdot P^\tau$$

mit $\beta = 1$ für geschlossene und $\beta = 2$ für offene Strings.

1.34 Satz. Die allgemeinen Eichungen aus Def. 1.33 implizieren die folgenden Gleichungen:

$$(1.54) \quad \dot{X} \cdot X' = 0$$

$$(1.55) \quad \dot{X}^2 + X'^2 = 0$$

Beweis. Zunächst sehen wir:

$$nX(\tau, \sigma) = \tilde{\lambda}(n \cdot p)\tau \Rightarrow \partial_\tau(n \cdot X) \neq 0$$

Aber es gilt auch, weil wir $n \cdot P^\sigma = 0$ verlangen:

$$0 = n \cdot P^\sigma = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X')\partial_\tau(nX) - \dot{X}^2\partial_\sigma(nX)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$$

Aus der ersten Gleichung von Def. 1.33 lesen wir unmittelbar $\partial_\sigma(n \cdot X) = 0$ ab, denn $n \cdot p$ ist ja konstant. Es folgt daraus unmittelbar $\dot{X} \cdot X' = 0$.

Unter Verwendung von $\dot{X} \cdot X' = 0$ erhält man weiter

$$P^{\tau\sigma} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(X')^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}}$$

Nun hilft die zweite Gleichung aus Def. 1.33 weiter:

$$n \cdot p = \frac{2\pi}{\beta} n \cdot P^\tau = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{(X')^2 (n \cdot \dot{X})}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}}$$

Ferner folgt aus der ersten Gleichung von Def. 1.33, dass

$$n \cdot \dot{X} = \beta \alpha' (n \cdot p).$$

Zusammen bekommt man

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(X')^2}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} \\ \iff -\dot{X}^2 X'^2 &= (X'^2)^2 \\ \iff X'^2 + \dot{X}^2 &= 0, \end{aligned}$$

denn es ist $X'^2 \neq 0$. □

1.35 Korollar. Es gilt

$$(1.56) \quad (\dot{X} \pm X')^2 = 0.$$

Beweis. Klar nach Satz 1.34. □

1.36 Korollar (Darstellung der kanonischen Impulse und der Bewegungsgleichung). Für die kanonischen Impulse bekommt man:

$$(1.57) \quad P^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu$$

$$(1.58) \quad P^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^\mu$$

Die Bewegungsgleichung (1.13) wird zu

$$(1.59) \quad \ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0.$$

Beweis. Wenn wir die zweite Gleichung aus Satz 1.34 ausnützt, so bekommt man $\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2} = \sqrt{X'^2 X'^2} = X'$. Das gibt die Darstellung der kanonischen Impulse. Die Bewegungsgleichung folgt sofort durch Einsetzen der neuen Darstellung der kanonischen Impulse in (1.13). □

1.37 Satz (Lösung der Bewegungsgleichung (1.59)). Es sei $f^\mu : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Dann löst

$$(1.60) \quad X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau)) \cos(n\sigma)$$

die Bewegungsgleichung des offenen Strings.

Beweis. Aus der klassischen Mechanik weiß man bereits, dass

$$(1.61) \quad X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma))$$

eine Lösung von (1.59) ist.

Betrachte einen offenen String mit der Neumann-Randbedingung $P^{\sigma\mu} = 0 \forall \sigma \in \{0, \pi\}$. Aus (1.58) folgt dann sofort $X'^\mu = 0 \forall \sigma \in \{0, \pi\}$. Es ist nun aber:

$$X'(\tau, 0) = \frac{1}{2} (f'^\mu(\tau) - g'^\mu(\tau)) = 0$$

Also $f'^\mu = g'^\mu \Rightarrow g^\mu = f^\mu + c^\mu$ mit den Konstanten c^μ . Diese kann aber in f^μ eingebaut werden, d.h.

$$(1.62) \quad X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma))$$

Außerdem:

$$X'(\tau, \pi) = \frac{1}{2} (f'^\mu(\tau + \pi) - f'^\mu(\tau - \pi)) = 0$$

Somit ist f' 2π -periodisch. Damit können wir f' als Fourier-Reihe schreiben:

$$(1.63) \quad f'^\mu(u) = f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^\mu \cos(nu) + b_n^\mu \sin(nu))$$

Integration gibt

$$(1.64) \quad f^\mu(u) = f_0^\mu + f_1^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos(nu) + B_n^\mu \sin(nu)).$$

Eingesetzt in (1.62) erhält man schließlich das, was zu zeigen war, nämlich:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau)) \cos(n\sigma)$$

□

1.38 Bemerkung. i. Es ist üblich, diese Lösung in komplexen Zahlen niederzuschreiben. Es ist

$$\begin{aligned} A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau) &= -\frac{i}{2} \left((B_n^\mu + iA_n^\mu) e^{in\tau} - (B_n^\mu - iA_n^\mu) e^{-in\tau} \right) \equiv \\ &\equiv -i \frac{\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}} \left(a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau} \right) \end{aligned}$$

Die $a_n^{\mu*}, a_n^\mu$ werden so dimensionslos.

ii. Interpretation von f_1^μ : Wir sehen, dass

$$P^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} f_1^\mu + \dots$$

Dann gilt nach (1.32):

$$p^\mu = \int_0^\pi P^{\tau\mu} d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \pi f_1^\mu \Rightarrow f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu$$

Es treten keine weiteren Terme auf, weil $\int_0^\pi \cos(nx) dx = 0$.

iii. Wir setzen ferner $x_0^\mu \equiv f_0^\mu$.

1.39 Korollar. Mit den in Bem. 1.38 getroffenen Vereinbarungen wird (1.60) zu:

$$(1.65) \quad X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau} \right) \frac{\cos(n\sigma)}{\sqrt{n}}$$

1.40 Bemerkung. i. Falls alle $a_n^\mu = 0$, dann wird die Bewegung eines Punktteilchens beschrieben.

ii. $X^\mu(\tau, \sigma)$ ist reell.

1.41 Notation. Es haben sich folgende Notationen manifestiert:

i. $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$

ii. $\alpha_n^\mu := a_n^\mu \sqrt{n}$, $\alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n}$, $n \geq 1$
Insbesondere ist $\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*$.

iii. Es folgt dann

$$X^\mu = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\alpha_{-n}^\mu e^{in\tau} - \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \right) \cos(n\sigma)$$

oder

$$(1.66) \quad X^\mu = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma).$$

1.42 Lemma. Es ergeben sich die folgenden Gleichungen für die Ableitungen:

$$(1.67) \quad \dot{X}^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \cos(n\sigma) e^{-in\tau}$$

$$(1.68) \quad X'^\mu = -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \sin(n\sigma) e^{-in\tau}$$

$$(1.69) \quad \dot{X}^\mu \pm X'^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}$$

Beweis. All das rechnet man leicht nach. □

1.43 Bemerkung. Es ist zu beachten, dass die hier gefundene Lösung die Einschränkungen aus Satz 1.34 zu erfüllen hat. Dazu werden wir in Lichtkegel-Koordinaten übergehen.

1.44 Definition (Lichtkegelkoordinaten). Die Darstellung des Vierervektors (x^0, x^1, x^2, x^3) in Lichtkegelkoordinaten lautet (x^+, x^-, x^2, x^3) mit

$$(1.70) \quad x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 + x^1)$$

$$(1.71) \quad x^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 - x^1)$$

1.45 Lemma. i. Das Linienelement in Lichtkegelkoordinaten sieht wie folgt aus:

$$(1.72) \quad -ds^2 = -2dx^+ dx^- + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

ii. Der Metriktensor ist dann entsprechend gegeben durch

$$(1.73) \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den Indizes $+, -, 2, 3$.

Beweis. Den ersten Teil rechnet man leicht nach:

$$2dx^+dx^- = (dx^0 + dx^1)(dx^0 - dx^1) = (dx^0)^2 - (dx^1)^2$$

Mit dem negativen Vorzeichen folgt die Behauptung.

Den Metriktensor kann man auch sofort ablesen, denn $-ds^2 = -2dx^+dx^- + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = -1dx^+dx^- - 1dx^-dx^+ + \dots$ \square

1.46 Korollar. Falls $n_\mu = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0)$, dann gilt

$$(1.74) \quad n \cdot X = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}} = X^+$$

$$(1.75) \quad n \cdot p = \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}} = p^+$$

$$(1.76) \quad X^+(\tau, \sigma) = \beta\alpha' p^+ \tau$$

$$(1.77) \quad p^+ = \frac{2\pi}{\beta} P^{\tau+}$$

Beweis. Die ersten beiden Gleichungen sind klar. Für die letzten beiden Gleichungen benutzt man Def. 1.33. \square

1.47 Notation. Die Stringkoordinaten $X^0, X^1, X^2, \dots, X^d$ fassen wir zusammen unter X^0, X^1, X^I mit $I \in \{2, \dots, d\}$.

1.48 Lemma. Die Bedingung (1.56) lautet in Lichtkegel-Koordinaten folgendermaßen:

$$(1.78) \quad -2(\dot{X}^+ \pm X'^+) (\dot{X}^- \pm X'^-) + (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 = 0$$

Beweis. Es ist $(\dot{X} \pm X')^2 = g_{\mu\nu} (\dot{X}^\mu \pm X'^\mu) (\dot{X}^\nu \pm X'^\nu)$. Unter Benutzung von (1.73) folgt unmittelbar die Behauptung. \square

1.49 Korollar. Man findet des Weiteren:

$$(1.79) \quad \dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2$$

Beweis. Es gilt $X'^+ = 0, \dot{X}^+ = \beta\alpha' p^+$. Das liefert die Behauptung mit dem vorherigen Lemma. \square

1.50 Satz (Lösung der Stringbewegungsgleichung für Lichtkegelkoordinaten). Die Lösung der Bewegungsgleichung eines offenen Strings ($\beta = 2$) unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen lautet:

$$(1.80) \quad X^+(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+ \tau$$

$$(1.81) \quad X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos(n\sigma)$$

$$(1.82) \quad X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma).$$

Beweis. Für einen offenen String ergibt Gleichung (1.76)

$$X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+ \tau$$

wobei wir Notation 1.411 ausnützen. Für die Indizes aus Indexmenge $\{-\} \cup I$ können wir die gewohnten Bewegungsgleichungen hernehmen. Dass wir das dürfen, zeigen wir im folgenden Lemma: \square

1.51 Lemma. Für α_n^- bekommen wir folgende Formel:

$$(1.83) \quad \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I$$

Beweis. Wir erhalten zunächst:

$$\begin{aligned} \dot{X}^- \pm X'^- &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} \\ \dot{X}^I \pm X'^I &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \end{aligned}$$

Nun zieht man Kor. 1.49 heran:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} &= \frac{1}{2p^+} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_q^I e^{-i(p+q)(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{2p^+} \sum_{n, p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \\ &= \frac{1}{2p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau \pm \sigma)} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

1.52 Definition (Transversale Virasoro-Moden). Die transversalen Virasoro-Moden L_n^\perp sind definiert als

$$(1.84) \quad L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I.$$

1.53 Lemma. Wir sehen insbesondere, dass

$$(1.85) \quad \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{L_n^\perp}{p^+},$$

$$(1.86) \quad \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- = 2\alpha' p^- = \frac{L_0^\perp}{p^+} \Rightarrow 2p^+ p^- = \frac{L_0^\perp}{\alpha'},$$

$$(1.87) \quad \dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{4\alpha' p^+} \left(\dot{X}^I \pm X'^I \right)^2.$$

Beweis. Folgt alles sofort durch Einsetzen. \square

1.54 Satz (Masse eines Strings). Die Masse eines Strings kann ausgedrückt werden als

$$(1.88) \quad M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (a_n^I)^* a_n^I.$$

Insbesondere ist $M^2 \geq 0$, d.h. wir können $M = +\sqrt{M^2} \geq 0$ setzen.

Beweis. Die relativistische Energie-Impuls-Beziehung ($c = 1$) lautet mit Lichtkegel-Koordinaten

$$(1.89) \quad M^2 = -p^2 = 2p^+p^- - p^I p^I.$$

Nun verwenden wir alle oben kennen gelernten Notationen (siehe z.B. Notationen 1.41) und Beziehungen. Es ist

$$2p^+p^- = \frac{L_0^\perp}{\alpha'} = \frac{1}{2\alpha'} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{0-p}^I \alpha_p^I = \frac{1}{\alpha'} \left[\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_p^I)^* \alpha_p^I \right] = p^I p^I + \frac{1}{\alpha'} \sum_{p=1}^{\infty} p (\alpha_p^I)^* \alpha_p^I$$

Das liefert die gewünschte Formel. Weil $a^*a = |a|^2 \geq 0$, folgt auch $M^2 \geq 0$. □

2 Quantisierung des relativistischen Strings